

Értékünk AZ **EMBER**

Humánerőforrás-fejlesztési Operatív Program



Horváth Péter

MECHATRONIKA ALAPJAI II.

Készült a HEFOP 3.3.1-P.-2004-09-0102/1.0 pályázat támogatásával.

Szerző: dr. Horváth Péter
egyetemi docens

Lektor: dr. Huba Antal
egyetemi docens

A dokumentum használata

Mozgás a dokumentumban

A dokumentumban való mozgáshoz a Windows és az Adobe Reader megszokott elemeit és módszereit használhatjuk.

Minden lap tetején és alján egy navigációs sor található, itt a megfelelő hivatkozásra kattintva ugorhatunk a használati útmutatóra, a tartalomjegyzékre, valamint a tárgymutatóra. A ◀ és a ▶ nyilakkal az előző és a következő oldalra léphetünk át, míg a Vissza mező az utoljára megnézett oldalra visz vissza bennünket.

Pozicionálás a könyvjelzőablak segítségével

A bal oldali könyvjelző ablakban tartalomjegyzékfa található, amelynek bejegyzéseire kattintva az adott fejezet/alfejezet első oldalára jutunk. Az aktuális pozíciókat a tartalomjegyzékfában kiemelt bejegyzés mutatja.

A tartalomjegyzék használata

Ugrás megadott helyre a tartalomjegyzék segítségével

Kattintsunk a tartalomjegyzék megfelelő pontjára, ezzel az adott fejezet első oldalára jutunk.

Keresés a szövegben

A dokumentumban való kereséshez használjuk megszokott módon a Szerkesztés menü Keresés parancsát. Az Adobe Reader az adott pozíciótól kezdve keres a szövegben.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés a rendszerelméletbe	5
1.1. A rendszer modellezése	6
1.2. A matematikai modellek csoportosítása	7
1.3. Szimuláció	15
1.4. A rendszerelmélet változói	15
1.5. A rendszer ábrázolási módjai	16
2. Rendszerelemek	19
2.1. Passzív elemek.....	19
2.2. Aktív elemek.....	39
3. Rendszervizsgálat.....	42
3.1. Tipikus gerjesztések (vizsgálójelek)	42
3.2. A rendszeregyenlet felírása	48
3.3. A rendszeregyenlet helyességének ellenőrzése	52
3.4. Rendszerek tipizálása a rendszeregyenlet alapján.....	53
3.5. Analógiák	54
4. A rendszeregyenlet megoldása.....	56
4.1. Megoldás az időtartományban	56
4.2. Megoldás a frekvenciatartományban.....	68
4.3. Megoldás az operátor tartományban. Laplace transzformáció	87
5. Vegyes feladatok a rendszeregyenlet megoldására	101
6. Bevezetés a numerikus analízisbe.....	127
6.1. Differenciálegyenletek közelítő megoldása	127
6.2. Interpoláció jelleggörbék megadására	144
6.3. Gyökkereső módszerek.....	147
7. Hajtástechnika	151
7.1. Hajtásláncok elemeinek redukciója	151
7.2. Dinamikai szempontból optimális áttétel meghatározása.....	160
7.3. A szögsebesség változásának analitikus vizsgálata	161
Irodalom.....	173

1. Bevezetés a rendszerelméletbe

A mechatronika jellegénél fogva összetett, bonyolult objektumokkal foglalkozik. Ezek az objektumok esetenként nagyon sok alkotórészből épülnek fel, melyek valamilyen kapcsolatban állnak egymással. Szokásosan az ilyen objektumokat rendszernek nevezzük.

Rendszer alatt olyan dolgok összességét értjük, melyeket kölcsönhatások kapcsolnak össze.

A meghatározásban a kölcsönhatás a lényeges, mert ennek hiányában bármilyen sok eleme is van egy halmaznak, az mégsem tekinthető rendszernek. Például egy autóbustt felépítő alkatrészek halmaza rendszernek tekinthető, mert az alkatrészeket kölcsönhatások (kényszererők) kapcsolják össze. Ugyanezek az alkatrészek a műhely raktárában nem tekinthetők műszaki szempontból rendszernek, mert nincs közöttük kölcsönhatás.

Mivel a térben és időben egymással kapcsolódó rendszerlemek kölcsönösen hatnak egymásra, ezért bármely helyen történő beavatkozás tovagűrűzik a rendszerben. A rendszer más-más tudományterülethez tartozó alkotórészeinek kölcsönhatásait ezért csak interdiszciplináris ismeretekkel és rendszerszemlélettel rendelkező szakember képes átlátni. Természetesen lehetetlen és szükségtelen is a kapcsolódó tudományterületek ismeretanyagát teljes mélységében elsajátítani, mivel a **rendszerelmélet** módszereivel az eltérő tudományterülethez tartozó jelenségek azonos összefüggésekkel, egységes módszerekkel tárgyalhatók. Az alapvető törvényszerűségek általánosítása, valamint az egységes tárgyalásmód elsajátítása megtérülő befektetés, mert jelentősen egyszerűsíti a mechatronikai mérnök munkáját.

Ahhoz azonban, hogy eljussunk a problémák rendszerezéséhez, általánosításához és egységes módszerrel való kezeléséhez, meg kell ismerkednünk a rendszerelmélet néhány alapfogalmával és módszerével.

1.1. A rendszer modellezése

A szerkezetek és jelenségek általában túl bonyolultak ahhoz, hogy minden tekintetben pontosan tudjuk azokat leírni. Ezért a rendszereket további vizsgálatok céljából modellezzük.

A **modell** a valóságos rendszer egyszerűsített, a vizsgálat szempontjából lényegi tulajdonságait tükröző mása.

A modellalkotás során a vizsgálat szempontjából lényegtelen tulajdonságoktól eltekintünk. A modellhez absztrakció (elvonatkoztatás) útján jutunk el. Az így kapott test-, anyag- és kapcsolati modellek ezért idealizáltak, a valóságban ilyen „steril” tulajdonságú elemek nem is léteznek. A modellek ezért csak bizonyos hibával írják le a vizsgált rendszer működését, következésképpen a modellt gyakran finomítani kell a valós szerkezeten végzett mérések alapján.

A vizsgálat céljától függően a rendszer más-más modellel írható le. Ha például egy autó helyzetének, azaz súlypontja mozgásának vizsgálata a cél, akkor az *tömegpontként* modellezhető. Ha ugyanannak az autónak a stabilitását vizsgáljuk kanyarban haladáskor, akkor a járművet véges kiterjedésű *merev testként* modellezzük. Az utazás komfortjának vizsgálatához azonban *rugalmas testekből* álló, összetett rendszerként kell modelleznünk a gépko-

A modellek fajtái a következők:

- a) **Homológ modell**, vagy kisminta. A hasonlóság legszorosabb fajtája, mert ugyanaz a fizikai jelenség geometriailag hasonló rendszerben megy végbe. Például megépítés előtt vízi erőmű modelljén végeznek méréseket. A kapott mérési eredmények hasonlósági törvényekkel számíthatók át a valós rendszerre.
- b) **Analóg modell**. Az eredeti rendszertől különböző rendszerben, különböző fizikai jelenség megy végbe, de a folyamatok törvényszerűsége azonos. Például egy mechanikus rendszer lengéstani jelenségeit ellenállásokból, kondenzátorokból, tekercsekből álló villamos rendszerrel modellezzük. A villamos rendszerben létrejövő lengésjelenségek

frekvencia és amplitúdó értékei átszámíthatók a mechanikus rendszerre.

- c) **Matematikai modell.** Matematikai formulák segítségével összefüggést teremt a rendszer bemenete és kimenete között. A korszerű számítástechnika lehetővé teszi a gyors, nagy pontosságú és olcsó modellezést. Megjegyzendő, hogy a homológ és analóg modellek megalkotásának is előfeltétele a rendszer és az azt helyettesítő rendszer matematikai modelljének ismerete.

A vizsgálni kívánt jelenség modelljének megalkotása nagy tapasztalatot igénylő mérnöki feladat, mondhatni „művészet”.

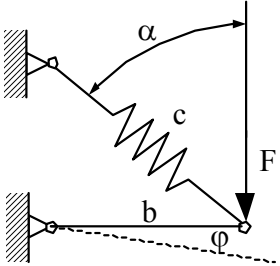
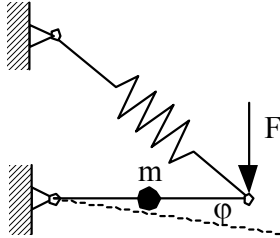
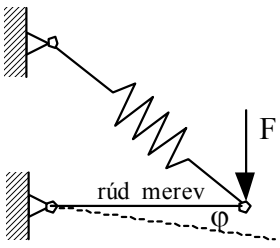
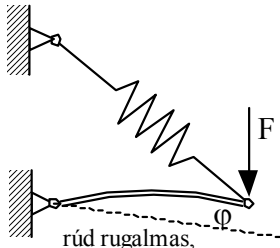
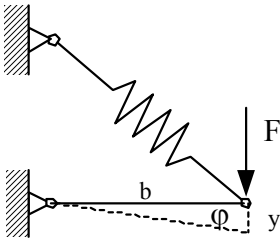
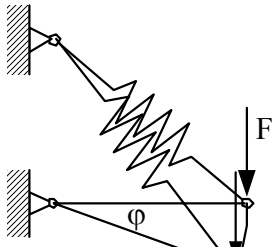
1.2. A matematikai modellek csoportosítása

A szimuláció alapját képező matematikai modelleket több szempont szerint lehet osztályozni. A fontosabb csoportosítási szempontokra szolgáló példák egy egyszerű konzolos tartó esetében az 1.1 ábrán szemléltethetők. Az ábrán F a terhelőerőt, c (N/m) a rugómerevséget, m a tömeget jelöli. A modellek fontosabb jellemzői:

- a) Statikus-dinamikus modell

Statikus a modell, ha a rendszer működését leíró összefüggés nem tartalmaz idő szerinti deriváltakat. Szokásos egyensúlyi, vagy állandósult állapotnak is nevezni. Az 1.1 ábrán a tömeg nélküli kar elfordulási szöge csak az erőből és a rugómerevségtől függ.

A *dinamikus* modell a rendszer időbeli viselkedését is leírja. Szokásosan közönséges, vagy parciális differenciálegyenletek, vagy operátortartománybeli egyenletek írják le. A tömeggel rendelkező kar és a rugó lengőrendszert alkot, mely lengései az időben zajlanak. A jelenség leírásához a differenciálegyenleten kívül a kezdeti és/vagy peremfeltételeket is meg kell adni.

 <p> $\varphi = \frac{F}{bc \cos^2 \alpha}$ Statikus modell (koncentrált, lineáris) </p>	 <p> $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{4c \cos^2 \alpha}{m} \varphi = \frac{4Fb}{m}$ Dinamikus modell (koncentrált, lineáris) </p>
 <p> rúd merev Koncentrált paraméterű modell </p>	 <p> rúd rugalmas, tömege van Elosztott paraméterű (kontinuum)modell </p>
 <p> $y \sim b\varphi$ φ kicsi Lineáris modell </p>	 <p> φ nagy Nemlineáris modell </p>

1.1 ábra. Modellek csoportosítása

b) Koncentrált paraméterű-elosztott paraméterű modell

Koncentrált paraméterű a modell, ha az egyes elemek csak egy jellemző tulajdonsággal rendelkeznek. Például az ábrán a karnak csak a tömege jellemző, rugalmassága és csillapítási képessége elhanyagolható. A rugónak ellenben csak a rugalmas tulajdonsága játszik szerepet, tömege és csillapítása elhanyagolható.

Elosztott paraméterű (kontinuum) a modell, ha az egyes elemek tulajdonságai nem választhatók szét. Például az ábrán mutatott vékony, tömeggel rendelkező kar alakváltozása már nem hanyagolható el, maga is rezgésre képes. Minden egyes kis elemi része tömeg (tehetetlenségi) és rugalmas tulajdonságokkal is rendelkezik, melyeket nem lehet egyetlen pontba koncentrálni. Jellegüknél fogva az alakkal nem rendelkező folyadékok és termikus jelenségek tartoznak ebbe a körbe. Az ilyen modellek sokkal bonyolultabb parciális differenciálegyenletekkel írhatók le.

c) Lineáris-nemlineáris modell

Lineáris a modell, ha a változókat lineáris függvénykapcsolat köti össze. Az ábrán a kar *kés elfordulásakor* feltételezhető, hogy a kar és a rugó érintkezési pontja függőlegesen mozdul el, a rugó összenyomódása pedig $y=a\varphi$, a rugóerő függőleges marad.

Nemlineáris a modell, ha a változók között nemlineáris függvénykapcsolat áll fenn. Az ábrán a kar nagyszögű elfordulása esetén a rugó alsó pontja köríven mozog, mely egyrészt megváltoztatja a rugóerő hatásvonalát és nagyságát az elfordulási szög függvényében. A műszaki rendszerek jelentős része nemlineáris modellel írható le, melyet a megengedett határokon belül linearizálással szokás egyszerűsíteni.

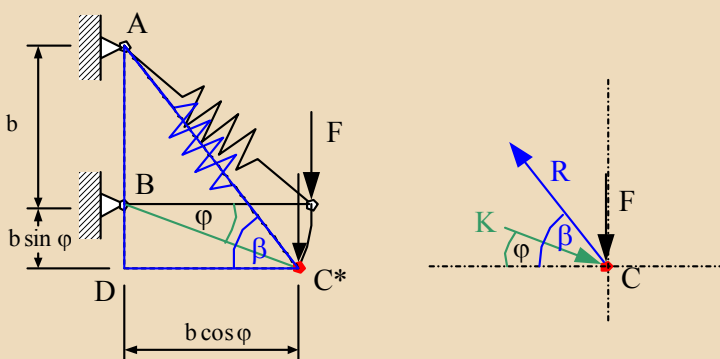
Bár a tananyag elsősorban a mechatronikai szerkezetek dinamikus modelljeinek megalkotására koncentrált, tanulságos és egyszerű volta miatt először az 1.2. ábrán látható konzolos szerkezet statikus modelljének megalkotását mutatjuk be. A matematikai modell felírását a konzol elfordulási szögének nagyságára tett korlátozás nélkül tárgyaljuk (nemlineáris modell).

Példa: statikus modell megalkotása.

- a) Határozzuk meg az 1.2 ábrán látható konzolos tartó BC rúdjának elfordulási szögét leíró $\varphi(F)$ függvénykapcsolatot.
- b) Határozzuk meg $F_0=0$ terhelés környezetében a linearizált $\varphi(F)$ függvénykapcsolatot!
- c) Határozzuk meg $F_0=5000$ N terhelés környezetében a linearizált $\varphi(F)$ függvénykapcsolatot!

Megoldás:

A pontos geometriai viszonyok tisztázása érdekében tételezzük fel, hogy *a szerkezet deformálódott állapotában is egyensúlyban van.* A könnyebb vizsgálat érdekében kissé eltúlozva rajzoltuk meg a szerkezet deformálódott alakját. A számításokat $b=1$ m és $c=10^5$ N/m adatokkal végezzük.



1.2. ábra

ad a)

Vizsgáljuk a szerkezet C pontjának egyensúlyát deformálódott állapotban! Ha F erőt működtetünk a szerkezetre, akkor a BC kar φ szöggel elfordul, valamint megváltozik a rugóerő nagysága és hajlásszöge. A szerkezet új egyensúlyi állapota ott áll be, amely pozícióban teljesül a C^* pontra a három erő egyensúlya. Az egyensúlyt kifejező egyenletek a következők:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{xi} = 0 &= K \cos \varphi - R \cos \beta \\ \sum F_{yi} = 0 &= -F - K \sin \varphi + R \sin \beta \end{aligned} \right\} \rightarrow K = R \frac{\cos \beta}{\cos \varphi}$$

Kifejezzük a K erőt az első egyenletből, majd helyettesítsük be a másodikba, ezzel megkapjuk F és φ kapcsolatát leíró egyenletet:

$$F = R(\sin \beta - \cos \beta \operatorname{tg} \varphi) \quad (1.1)$$

Mivel az egyenletben a rugóerő, valamint a rugó megváltozott szöge is szerepel, ezért mellékszámításokat kell végeznünk. A rugó megváltozott hossza (ADC* Δ):

$$\overrightarrow{AC^*} = \sqrt{[b(1 + \sin \varphi)]^2 + [b \cos \varphi]^2} = b\sqrt{2}\sqrt{1 + \sin \varphi}$$

A rugó megváltozott β szögének szögfüggvényei (ADC* Δ):

$$\sin \beta = \frac{b(1 + \sin \varphi)}{b\sqrt{2}\sqrt{1 + \sin \varphi}} = \frac{1 + \sin \varphi}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \sin \varphi}} = \frac{\sqrt{1 + \sin \varphi}}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \beta = \frac{b \cos \varphi}{b\sqrt{2}\sqrt{1 + \sin \varphi}} = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \sin \varphi}}$$

A rugó hosszváltozása a megváltozott hossz és az eredeti hossz különbsége:

$$\Delta l = \overrightarrow{AC^*} - \overrightarrow{AC} = b\sqrt{2}\sqrt{1 + \sin \varphi} - b\sqrt{2} = b\sqrt{2}(\sqrt{1 + \sin \varphi} - 1)$$

A rugóerő c merevségű rugó esetén:

$$R = c\Delta l = c \cdot b\sqrt{2}(\sqrt{1 + \sin \varphi} - 1)$$

A mellékszámítások eredményeit az (1.1) egyensúlyi egyenletbe helyettesítve kapjuk a keresett függvénykapcsolatot:

$$\begin{aligned}
 F &= cb\sqrt{2}(\sqrt{1+\sin\varphi}-1)\left(\frac{\sqrt{1+\sin\varphi}}{\sqrt{2}}-\frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}\sqrt{1+\sin\varphi}}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)= \\
 &= cb(\sqrt{1+\sin\varphi}-1)\left(\sqrt{1+\sin\varphi}-\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1+\sin\varphi}}\right) \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

A kapott egyenlet $F(\varphi)$ alakú, azonban nekünk a $\varphi(F)$ függvénykapcsolatra van szükségünk. Az inverz függvényre való áttérés nem lehetséges minden esetben, de most szerencsére az (1.2) egyenletből matematikai átalakításokkal kifejezhető a φ szög. Vezessünk be új változót:

$$x = \sqrt{1 + \sin \varphi}$$

Az egyenlet átírható

$$F = cb(x-1)\left(x - \frac{x^2-1}{x}\right)$$

alakba, ahonnan részsámítások után

$$\sin \varphi = \frac{c^2 b^2}{(cb - F)^2} - 1 \quad \rightarrow \quad \varphi = \arcsin\left[\frac{c^2 b^2}{(cb - F)^2} - 1\right] \quad (1.3)$$

adódik. (Az egyenlet helyessége ellenőrizhető, mert $F=0$ esetére $\varphi=0$ adódik.)

ad b)

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy a kapott nemlineáris függvénykapcsolat miként linearizálható kis ($F_0=0$) terhelések, valamint nagy ($F_0=10^4$ N) terhelések környezetében.

Munkaponti linearizációval kiszámítjuk $F_0=0$ környezetében az elfordulási szöget. Az (1.3) szerinti $\varphi(F)$ függvényt Taylor-sorának első két tagjával közelítjük:

$$\varphi \cong \varphi_0 + \left. \frac{d\varphi}{dF} \right|_{F=0} (F - F_0)$$

A derivált függvény a következő:

$$\frac{d\varphi}{dF} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{c^2 b^2}{(cb - F)^2} - 1\right)^2}} \cdot \frac{-2c^2 b^2}{(cb - F)^3} (-1)$$

A derivált értéke az $F_0=0$ munkapontban:

$$\left. \frac{d\varphi}{dF} \right|_{F=0} = \frac{2}{cb} = \frac{2}{10^5 \cdot 1} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/N}$$

Kis terhelésekre ($F_0=0$) a linearizált függvénykapcsolat $\varphi_0=0$ és $F_0=0$ figyelembevételével:

$$\underline{\underline{\varphi \cong 2 \cdot 10^{-5} F}},$$

egy origón átmenő egyenes egyenlete.

ad c)

Nézzük meg, hogy nagy terhelések tartományában ($F_0=10^4$ N) milyen linearizált összefüggéssel számítható az elfordulási szög!

A munkaponti elfordulási szög:

$$\varphi_0 \Big|_{F=10000} = \arcsin \left[\frac{c^2 b^2}{(cb - F_0)^2} - 1 \right] = \arcsin \left[\frac{10^{10}}{(10^5 - 10^4)^2} - 1 \right] = 0,236 \text{ rad}$$

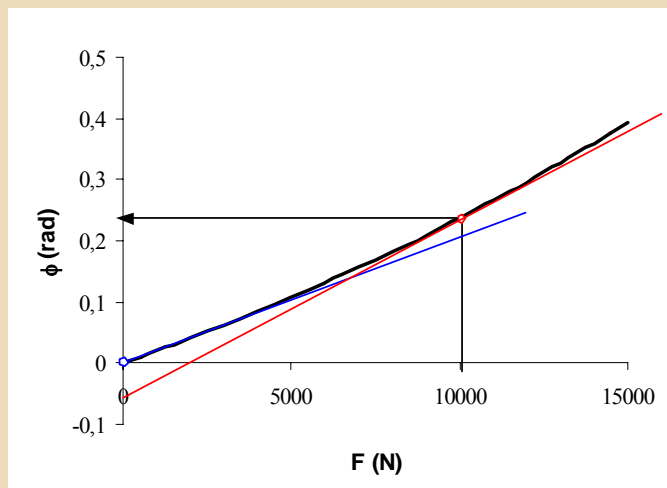
A munkaponti érintő egyenes meredeksége:

$$\frac{d\phi}{dF}\Big|_{F=10000} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left[\frac{c^2 b^2}{(cb - F)^2} - 1 \right]^2}} \cdot \frac{2c^2 b^2}{(cb - F)^3} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left[\frac{10^{10}}{(10^5 - 10^4)^2} - 1 \right]^2}} \cdot \frac{2 \cdot 10^{10}}{(10^5 - 10^4)^3} = 2,91 \cdot 10^{-5}$$

$$\phi \cong 0,236 + 2,91 \cdot 10^{-5} (F - 10^4) = \underline{\underline{2,91 \cdot 10^{-5} F - 0,054}} \text{ rad}$$

A kar elfordulási szögének és a terhelésnek kapcsolatát, valamint a kis és nagy erőkre linearizált kapcsolatot az 1.3. ábrán láthatjuk.



1.3. ábra

Megállapítható, hogy a $0 \leq F \leq 5000$ N tartományban a függvénygörbe és annak érintője vonalvastagságon belül halad, a kapcsolat lineárisnak tekinthető. A kar szögelfordulása a lineáris tartományban kisebb, mint 0,1 radián. Mivel a gépészeti szerkezetek alakváltozása még a bemutatott példánál is kisebb, ezért van létjogosultsága a lineáris modellnek.

1.3. Szimuláció

A rendszer modelljének ismerete lehetővé teszi a rendszer működésének vizsgálatát még a tervezés fázisában más-más rendszerjellemzők esetén.

Szimulációnak nevezzük a valódi rendszer modelljén végzett vizsgálatokat.

A szimuláció célja, hogy egyrészt ellenőrizzük a rendszer működőképességét, másrészt kiválasszuk a rendszer különféle paraméterkombinációiból a valamilyen szempont szerinti optimális változatot.

A matematikai szimuláció lehet *analóg*, vagy *digitális* (numerikus). Bár a számítástechnika fejlődése nagyban csökkentette az analóg számítógéppel végzett szimuláció jelentőségét, néhány esetben, ahol nagy működési sebesség szükséges (pl. rakétaelhárító rendszerek), még alkalmazásra kerül a digitális szimulációval kombinálva (hibrid szimuláció).

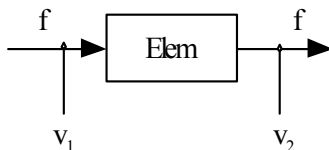
1.4. A rendszerelmélet változói

A fizikai rendszerek extenzív és intenzív mennyiségekkel jellemezhetőek.

Az *extenzív* mennyiségekre igazak a megmaradási törvények. Ezek a mennyiségek összegezhetőek, ami azt jelenti, hogy az eredő tömeg, hosszúság, térfogat, töltés stb. megegyezik a részek összegével. Az extenzívek árama (tömegáram, térfogatáram, elektromos áram, hőáram) a rendszer egyes elemein gyengítetlenül, veszteség nélkül halad át. Felismerésüket ez a tulajdonság megkönnyíti. A gyakoribb elnevezésük: **átmenő változó**. Az 1.4. ábrán f jelöli az átmenő változót.

Az *intenzív* mennyiségek különbsége az oka az extenzívek áramának. Például az ellenálláson csak akkor folyik át áram, ha az ellenállás két végpontja között feszültségkülönbség van. Folyadék akkor áramlik egy csőben, ha a cső két végpontja között nyomáskülönbség van. Az intenzív mennyiségek az elem két végpontjában különböző értéket vesznek fel,

rájuk az összegezhetőség nem igaz. A gyakoribb elnevezésük: **keresztváltzó**. Az 1.4. ábrán v_1 és v_2 jelöli az elem két végződésén mérhető keresztváltzót.



1.4. ábra

Számításokban az elem két végződésén mért keresztváltzó különbsége szerepel, amit az egyszerűség kedvéért kettős indexszel jelölünk: $v_{12} = v_1 - v_2$. A célszerűen megválasztott változó-pár szorzata teljesítmény dimenziójú:

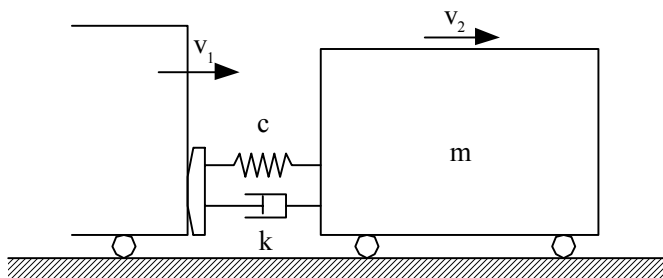
$$P = f \cdot v_{12}$$

1.5. A rendszer ábrázolási módjai

A rendszert vizsgálatának megkönnyítése érdekében vázlatokkal ábrázoljuk, melynek főbb fajtái a *szerkezeti-* és a *hatásvázlat*.

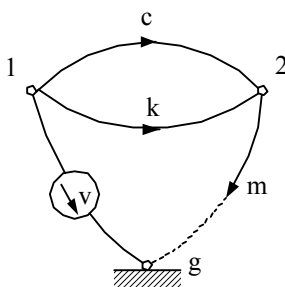
A *szerkezeti vázlat* nagyon hasonló a tényleges szerkezet kialakításához, de annak csak a vizsgálat szempontjából lényeges részeit tartalmazza. Az 1.5. ábrán egy vasúti kocsí szerkezeti vázlata látható a kocsí ütközésének vizsgálatához.

Bizonyos fokkal elvonatkoztatottabb ábrázolási mód a rendszer *struktúra-gráffal* történő jellemzése (1.6. ábra). A csomópontokat, melyekben a keresztváltzó más-más értéket vesz fel, gráf-ágak (görbe vonalak) kötik össze, melyek a rendszer elemeinek egymással való kapcsolatára utalnak. A gráf-ágak irányításának nincs különösebb szerepe. A referenciapontot, melyhez képest a keresztváltzókat értelmezzük, g -vel (ground = föld) jelöljük. A struktúra-gráf feltünteti a forráselemeket (gerjesztéseket) is. A



1.5. ábra. Rendszer szerkezeti vázlata

keresztváltó-típusú forrás iránya mindig a referenciapont felé mutat, míg az átmenő változó forrás ahhoz az elemhez mutat, amelyre a forrás kifejti hatását.



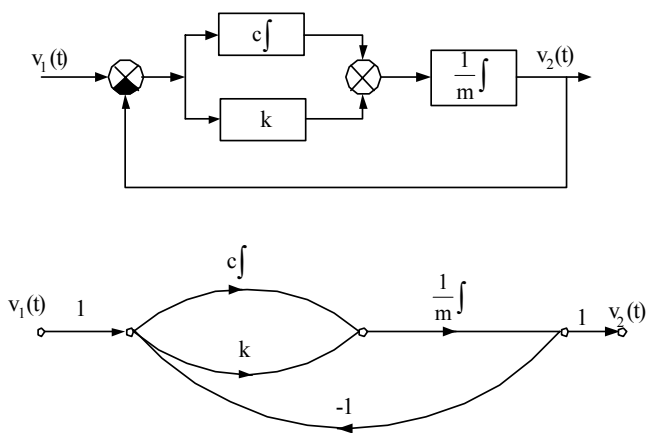
1.6. ábra. Rendszer struktúra-gráfja.

A *hatásvázlat* a rendszer elvonatkoztatott ábrázolási módja. A rendszer elkülöníthető részeit jelképező szimbólumokat a jelek haladását ábrázoló hatásvonalak kapcsolják össze. Az előbbi ábrázolási módokkal ellentétben a rendszer elemeinek mennyiségi kapcsolatára is utal. Két fontosabb fajtája a *tömbvázlat* és a *jelfolyam-ábra* (gráf).

A tömbvázlatban a rendszer megkülönböztethető tulajdonságú elemeit (melyek két végződésén a keresztváltó értéke különböző) téglalapok jelölik. A téglalapokban a jel módosítását leíró függvényt vagy jelleggörbét tüntetik fel. A téglalapokat összekötő nyilak a jel haladási irányát ábrázolják. A jelek elágazhatnak, vagy előjelhelyesen összegződhetnek. A kivonást az összegzőpont megfelelő szektorának sötétítésével jelöljük. A 1.7. ábra

felső részén a v_1 sebességű mozdony és a v_2 pillanatnyi sebességű kocsí hatásvázlata látható.

A jelfolyam-ábra nagyon hasonló a tömbvázlathoz, csak formailag különbözik tőle. A jelmódosítást itt nem téglalapokba, hanem a hatásvonalak (élek) fölé írjuk. A hatásvonalakat többnyire görbült vonalakkal ábrázoljuk. Az előjelhelyes összegzést egyszerű csomópontokkal jelöljük. A csomópontba befutó élek fölé írt függvény előjele dönti el, hogy összegzésről vagy különbségképzésről van-e szó.



1.7. ábra. Rendszer hatásvázlata: tömbvázlat és jelfolyam-ábra

2. Rendszerelemek

A rendszert általánosságban passzív és aktív rendszerelemek, azok kapcsolatát biztosító átalakítók, a rendszer energiaellátásról gondoskodó források és energia fogyasztó terhelések építik fel.

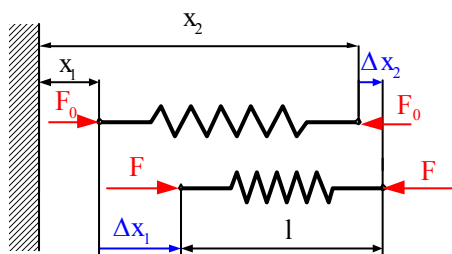
2.1. Passzív elemek

A következőkben csak koncentrált paraméterű rendszerelemekkel foglalkozunk. Egy rendszerelem csak egyféle tulajdonságot testesít meg. Például a rugó csak a rugalmas hatást modellezi, tömege (tehetetlensége) és csillapítása elhanyagolható.

2.1.1. Mechanikus elemek

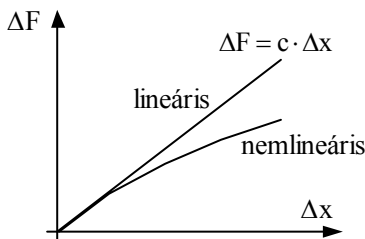
(Átmenő változó: F [N] erő. Keresztváltozó: v [m/s] sebesség)

a) Rugó



2.1. ábra. Rugó modellje.

A lineáris rugóra ható erő változása egyenesen arányos a rugó hosszváltozásával (2.2. ábra). Arányossági tényező a c [N/m] rugómerevség. (Szokásos s -sel is jelölni, de ez a jelölés megegyezik a Laplace-transzformáció operátorával, ezért nem alkalmazzuk. Középiskolában D -vel is jelölték).



2.2 ábra. Rugómerevség értelmezése.

A 2.1. ábra a rugó két állapotát mutatja. Ha a már eredetileg is összenyomódott rugót F_0 erő terheli (1. állapot), akkor az erő a további összenyomódással arányosan növekszik (2. állapot, $F > F_0$):

$$F - F_0 = c(\Delta x_1 - \Delta x_2)$$

Megjegyzés: gyakorlatban sokszor az $F=c(l-l_0)$ összefüggést használjuk, ahol l_0 a rugó terheletlen hossza.

Mivel mechanikus rendszerek esetében a keresztváltozó szokásosan a sebesség, ezért azzal felírva a rugó egyenletét két időpont között:

$$F = c \int v_{12} dt + F_0 \tag{2.1}$$

ahol a keresztváltozó az elem két végpontjának sebességkülönbsége:

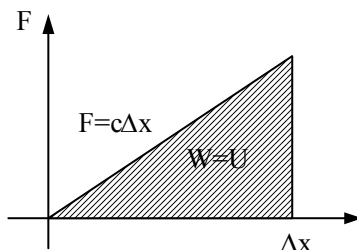
$$v_{12} = v_1 - v_2.$$

A rugó hosszváltozása révén energia tárolására képes. Ehhez nem szükséges a keresztváltozó zérustól különböző értéke (relatív sebesség), ezért a rugó A-típusú tároló.

A tárolt potenciális energia a rugó Δx -szel való megnyújtása (összenyomása) során végzett munkával arányos:

$$W = \int P dt = \int F v dt = \int c \Delta x \frac{d\Delta x}{dt} dt = \frac{c \Delta x^2}{2} \tag{2.2}$$

Szemléletesen a tárolt energia az erő-deformáció diagram alatti területtel arányos:

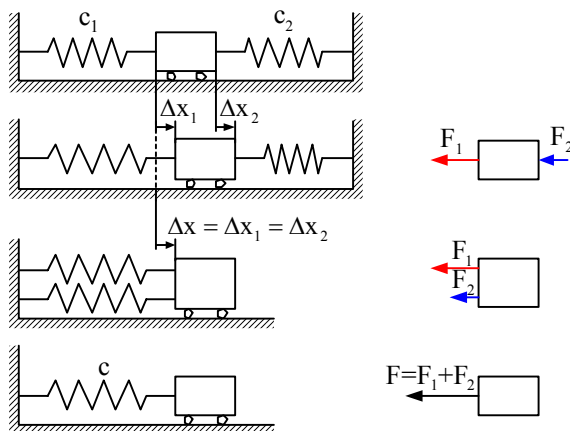


2.3. ábra

A rugók gyakran sorosan, vagy párhuzamosan kapcsolódnak egymással. Sok esetben ránézésre nem lehet eldönteni, hogy melyik kapcsolási esettel állunk szemben.

Soros kapcsolásnál az átmenő változó (erő) egyezik meg, míg párhuzamos kapcsolásnál a keresztváltozó (hosszváltozás) a közös.

A 2.4. ábrán látható rendszer rugói ránézésre sorba vannak kapcsolva. Alaposabb vizsgálat szerint azonban kiderül, hogy a rugók hosszváltozása közös, hiszen amennyivel megnyúlik az egyik rugó, ugyanannyival rövidül meg a másik. A rugók ezért párhuzamos kapcsolásúak.



2.4. ábra. Rugók párhuzamos kapcsolása.

Az egyszerűbb kezelhetőség kedvéért szokás a párhuzamosan kapcsolt rugókat egyetlen, c merevségű rugóval helyettesíteni. A helyettesítő rugó az eredetivel megegyező $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2$ hosszváltozásra ugyanakkora erőt fejt ki, mint eredetileg a különálló rugók:

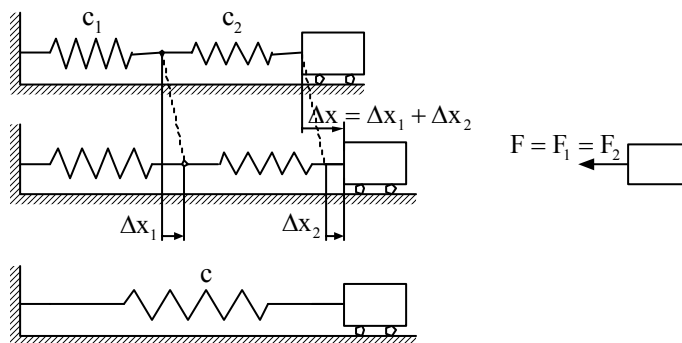
$$F = F_1 + F_2$$

$$c \cdot \Delta x = c_1 \Delta x + c_2 \Delta x$$

Párhuzamosan kapcsolt rugók eredő rugómerevsége az egyes rugók merevségeinek összege:

$$c = c_1 + c_2 \tag{2.3}$$

Rugók soros kapcsolása látható a 2.5. ábrán. A rugókban ébredő erők megegyeznek, ellenben az eredő deformáció a rugók deformációinak összege.



2.5. ábra. Rugók soros kapcsolása.

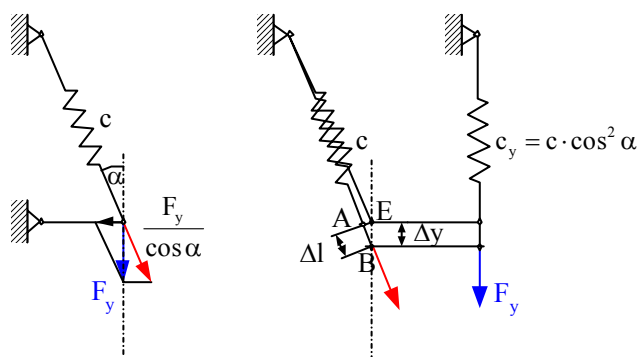
$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

$$\frac{F}{c} = \frac{F}{c_1} + \frac{F}{c_2}$$

Sorosan kapcsolt rugók eredő merevsége az alábbi módon számítható:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \tag{2.4}$$

Gyakran előforduló eset, hogy a rugó végének elmozdulása α szöget zár be a rugó tengelyével. Például a vízszintes kar végéhez rögzített ferde helyzetű rugó végpontja csak függőlegesen mozdulhat el. A feladat annak meghatározása, mekkora a rugó elmozdulás-irányú merevsége kis elmozdulások feltételezésével?



A rugó csak tengelyének irányába eső erőt képes kifejteni, ezért először meg kell határozni az adott F_y erőből a rugó tengelyébe eső erőt. Ez az erő a rugó $\Delta l = F_y / (c \cdot \cos \alpha)$ mértékű megnyúlását okozza. Az adott irányú, jelen esetben függőleges elmozdulás az ABE derékszögű háromszögből $\Delta y = \Delta l / \cos \alpha$ lesz.

A keresett rugómerevség a következő:

$$c_y = \frac{F_y}{\Delta y} = \frac{F_y}{\frac{\Delta l}{\cos \alpha}} = \frac{F_y}{\left(\frac{F_y}{c \cdot \cos \alpha}\right) \frac{1}{\cos \alpha}} = c \cdot \cos^2 \alpha$$

Egy c merevségű, nem a tengelyébe eső elmozdulást végző rugó mindig helyettesíthető egy

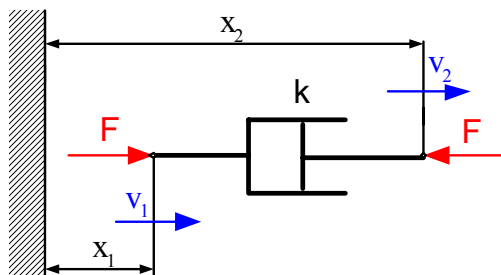
$$c_\alpha = c \cdot \cos^2 \alpha$$

egyenértékű merevségű, elmozdulás irányú rugóval. Az összefüggésben α a rugó tengelye és az elmozdulás iránya által bezárt szög.

b) Csillapító

Csak a sebességarányos csillapítóval foglalkozunk, mert ez egyszerű, lineáris modellel írható le. Az egyéb csillapító hatások (Coulomb-súrlódás, közegeellenállás, hiszterézis stb.) modellezése sokkal bonyolultabb, több ismeretet igényel, ezért néhány esetben visszavezetik őket egyenértékű sebes-

ségarányos csillapításra. A sebességarányos csillapítást a gyakorlatban jól közelíti a folyadékos lengéscsillapító (2.6. ábra).



2.6. ábra

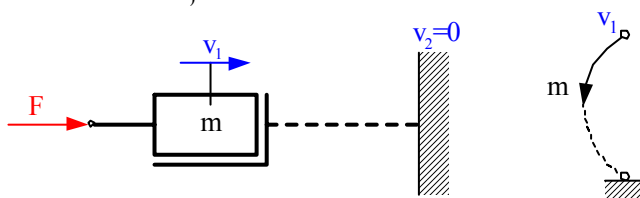
A csillapító két végpontjának $v_{12}=v_1-v_2$ relatív sebességgel való mozgatásához

$$F = kv_{12} \tag{2.5}$$

erő szükséges. A csillapító „D” típusú (disszipatív) energiafogyasztó elem.

c) Tömeg

A tömeg a test tehetetlenségét modellezi. Látszólag a tömegnek egy végződése van. Azonban a sebességét mindig egy választott álló referencia-ponthoz (állócsillagok, Föld) viszonyítva mérjük, amit a tömeg modelljén szaggatott vonallal szokás jelölni.



2.7. ábra

A tömeget leíró egyenlet a következő:

$$F = m \frac{dv_{12}}{dt} \tag{2.6}$$

A tömeg sebessége (kereszt változója) révén mozgási energiát tud tárolni még akkor is, ha éppen nem hat rá erő. Ezért a tömeg „K” típusú tároló. A tárolt energia:

$$E = \int P dt = \int F v_{12} dt = \int v_{12} m \frac{dv_{21}}{dt} dt = \frac{m v_{12}^2}{2} \quad (2.7)$$

A mechanikus rendszer elemeket illetően megjegyezzük, hogy nem csak haladó, hanem forgó mozgásra is hasonló elemek értelmezhetők az alábbi megfeleltetések mellett:

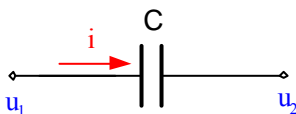
$$\begin{aligned} F &\leftrightarrow M \\ v &\leftrightarrow \omega \\ m &\leftrightarrow J \\ c &\leftrightarrow c_{\text{torz}} \\ k &\leftrightarrow k_{\text{torz}} \end{aligned}$$

2.1.2. Villamos elemek.

(Átmenő változó: i [A] áram. Keresztváltozó: u [V] feszültség)

a) Kapacitás

Ismeretes, hogy egy kondenzátorban tárolt töltés mennyisége arányos a fegyverzetek $u_{21} = u_2 - u_1$ feszültségkülönbségével: $Q = C u_{21}$.



2.8. ábra

Deriváljuk az egyenlet mindkét oldalát az idő szerint, majd vegyük figyelembe, hogy egységnyi idő alatt a vezetõben áramló töltés az árammal egyenlõ. A kondenzátor mûködését leíró egyenlet ezzel

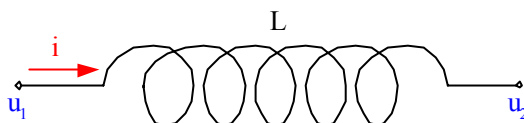
$$i = C \frac{du_{12}}{dt} \quad (2.8)$$

lesz. A kondenzátorban energia tárolható a feszültségkülönbség révén, ezért a kondenzátor „K” típusú tároló. A tárolt energia:

$$E = \int P dt = \int u_{12} i dt = \int u_{12} C \frac{du_{12}}{dt} dt = \frac{C u_{12}^2}{2} \quad (2.9)$$

b) Induktivitás

Előző tanulmányainkból (Mechatronika alapjai I) ismert, hogy egy tekercs belsejében a fluxus arányos a tekercsben folyó árammal: $\Phi = Li$.



2.9. ábra

Másrészt a fluxus változáskor feszültség indukálódik a vezető két vége között:

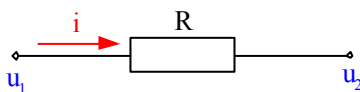
$$u_{12} = \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt} \quad (2.10)$$

A tekercsben a mozgó töltések révén energia tárolható, melynek nagysága:

$$E = \int P dt = \int i u_{12} dt = \int i L \frac{di}{dt} dt = \frac{L i^2}{2} \quad (2.11)$$

c) Ellenállás

Az ohmikus ellenállás két végének $u_{12} = u_1 - u_2$ feszültségkülönbsége (a „feszültségesés”) arányos az ellenálláson átfolyó árammal.



2.10. ábra

Az ellenállás viselkedését az Ohm-törvényként ismert összefüggés írja le:

$$u_{12} = Ri \tag{2.12}$$

Az ellenállás energia fogyasztó, „D” típusú elem.

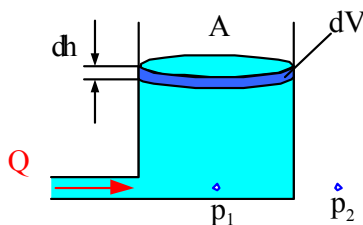
2.1.3. Hidraulikus elemek

(Átmenő változó: Q [m^3/s] folyadékáram. Keresztváltozó: p [$N/m^2=Pa$] nyomás)

Megjegyzendő, hogy a koncentrált paraméterű hidraulikus elem alkalmazásával a folyadékok dinamikája csak egyszerű esetekben vizsgálható.

a) Kapacitás (tartály)

Az A =állandó keresztmetszetű felül nyitott tartályban a folyadék dh szintváltozása a folyadék térfogatának $dV=Adh$ változását okozza. Közben a tartály fenekén a hidrosztatikus nyomás $dp=\rho g dh$ értékkel változik meg.



2.11. ábra

A térfogat- és nyomásváltozás összefüggése ezzel:

$$dV = Adh = A \frac{dp_{12}}{\rho g}$$

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát dt -vel:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{A}{\rho g} \cdot \frac{dp_{12}}{dt},$$

amit

$$Q = C_h \frac{dp_{12}}{dt} \tag{2.13}$$

alakban is írhatunk.

Állandó keresztmetszetű, túlnyomás nélküli tartály hidraulikai kapacitása tehát

$$C_h = \frac{A}{\rho g} \tag{2.14}$$

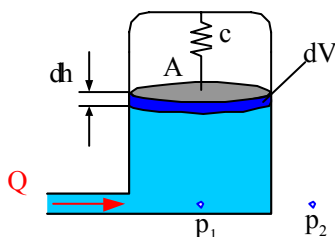
A tartályban tárolt energia

$$W = \int P dt = \int Q p dt = \int p_{12} C_h \frac{dp_{12}}{dt} dt = \frac{C_h p_{12}^2}{2} \tag{2.15}$$

Hidraulikus akkumulátorról beszélünk, ha a folyadék felszínére nagynyomású gáz, vagy rugóval terhelt dugattyú hat bizonyos erővel.

Ekkor dh szintváltozás esetén a nyomásváltozás:

$$dp_{12} = \rho g dh + \frac{dF}{A} = \frac{\rho g A + c}{A} dh$$



2.12. ábra. Hidraulikus akkumulátor

A térfogatváltozás és a nyomásváltozás kapcsolata:

$$dV = A \frac{A}{\rho g A + c} dp_{12}$$

Idő szerint deriválva mindkét oldalt:

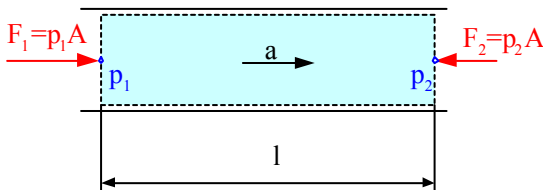
$$Q = \frac{A^2}{\rho g A + c} \cdot \frac{dp_{12}}{dt}$$

Ezzel a hidraulikus akkumulátor kapacitása

$$C_h = \frac{A^2}{\rho g A + c} \tag{2.16}$$

b) Inertivitás (folyadék tehetetlenség)

Tételezzük fel, hogy egy A keresztmetszetű csővezeték két pontja között p_{21} nyomáskülönbség van. Az ellenőrző felülettel elkerített $m = \rho A l$ koncentrált tömegű folyadékrész Newton II szerint a ráható $F_1 - F_2$ erő hatására gyorsul:



2.13. ábra

$$\sum F_i = ma \rightarrow (p_1 - p_2)A = \rho A l a$$

A $p_1 - p_2$ nyomáskülönbséget p_{12} -vel, valamint az Adv elemi térfogatáramot dQ -val jelölve, a

$$p_{12} = \frac{\rho l}{A} \cdot \frac{Adv}{dt} = L_h \frac{dQ}{dt} \tag{2.17}$$

összefüggést nyerjük.

Az inertivitás, mint a koncentrált folyadékmennyiség tehetetlenségének mértéke

$$L_h = \frac{\rho l}{A} \quad (2.18)$$

Az áramló folyadék sebessége révén energiát tárol, mely nagysága

$$E = \int P dt = \int Q p_{12} dt = \int Q L_h \frac{dQ}{dt} dt = \frac{L_h Q^2}{2} \quad (2.19)$$

c) Hidraulikus ellenállás

A csőben lévő szűkület vagy görbület, vagy a cső falának érdessége a nyomás csökkenését, ezzel energiaveszteséget okoz. A $p_1 - p_2 = p_{12}$ nyomás-csökkenés a hidraulikus ellenállással arányos:

$$p_{12} = R_h Q \quad (2.20)$$

A hidraulikus ellenállás idomdarabokkal ellátott csővezetékre a következő:

$$R_h = \frac{8\rho Q}{d^4\pi} \left(\frac{1}{d} \lambda + \xi \right)$$

ahol d a cső átmérője, λ a csősúrlódási tényező, ξ az idomdarabok ellenállási tényezője. Érdekes megfigyelni, hogy a hidraulikus ellenállás maga is függ a térfogatáramtól. Kis áramlási sebességnél (Reynolds szám $Re < 2300$, ν : kinematikai viszkozitás, μ : dinamikai viszkozitás) azonban az egyenes csőszakasz hidraulikai ellenállása lineáris:

$$R_h = \frac{128\mu l}{d^4\pi}, \quad Re = \frac{d \cdot v}{\nu} < 2300$$

2.1.4. Termikus elemek

(Átmenő változó: Φ [J/s] hőáram. Keresztváltozó: ϑ [°C] hőmérséklet)

Megjegyzés: a termikus elemek csak részben illeszthetők be a rendszerelmélet egységes rendszerébe. Nem létezik például A-típusú tároló. Elképzelhető, hogy a távoli jövőben az entrópiához hasonló új hőtani változó bevezetésével a termikus elemek is részei lehetnek az egységes rendszernek.

a) Hőkapacitás

A c fajhőjű, m tömegű, ϑ_{12} relatív (referenciahőmérséklethez viszonyított) hőmérsékletű test $d\vartheta_{12}$ hőmérsékletváltozás közben tárolt hőenergiájának változása:

$$dQ = cm \cdot d\vartheta_{12}$$

Az összefüggés idő szerinti deriválásával az időegység alatt áramló hőenergia, a hőáram a következő:

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} = cm \frac{d\vartheta_{12}}{dt}$$

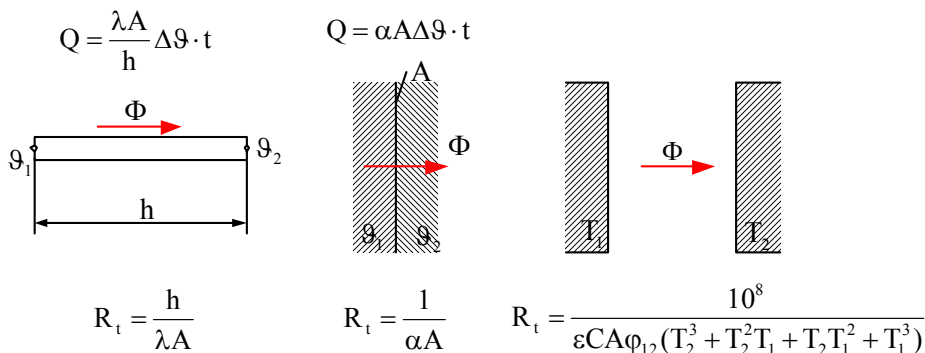
Bevezetve a $C_t = mc$ *hőkapacitást*, a fenti egyenlet

$$\Phi = C_t \frac{d\vartheta_{12}}{dt} \quad (2.21)$$

alakban írható. Megjegyzendő, hogy a fajhő általában függvénye a hőmérsékletnek.

b) Termikus ellenállás

Két különböző hőmérsékletű pont között hőátadás megy végbe. A hőátadással szemben támasztott R_t [K/W] termikus ellenállás hővezetéskor, hőáramláskor és hőszugárzáskor a közölt összefüggésekkel számítható $\vartheta_1 > \vartheta_2$ esetben (a középiskolában tanult képletek alapján):



2.14. ábra

A képletekben szereplő mennyiségek:

- λ [W/K m] hővezetési tényező
- α [W/K m²] hőátadási tényező
- h [m] a két keresztmetszet távolsága
- A [m²] felület
- T [K] abszolút hőmérséklet
- ε felületek redukált feketeségi fok
- φ_{12} szögtényező

A termikus ellenállás, a hőáram és a hőmérsékletkülönbség kapcsolata mindhárom esetben a következő:

$$\Phi = \frac{\vartheta_{12}}{R_t} \tag{2.22}$$

Az alábbi táblázatban összefoglaltuk a passzív elemek főbb tulajdonságait.

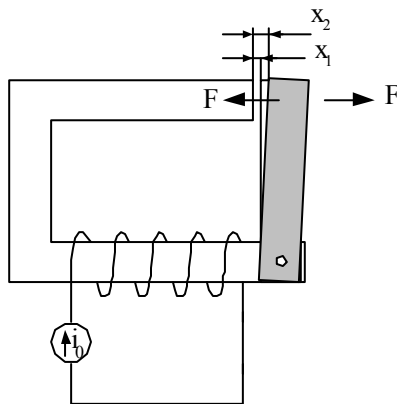
	Elem	Egyenlet		Tárolt energia
	Tömeg	$F = m \frac{dv_{12}}{dt}$	$v_{12} = \frac{1}{m} \int F dt$	$\frac{mv_{12}^2}{2}$
	Kondenzátor	$i = C \frac{du_{12}}{dt}$	$u_{12} = \frac{1}{C} \int i dt$	$C \frac{u_{12}^2}{2}$
„K”- típusú tároló	Tartály	$Q = C_h \frac{dp_{12}}{dt}$ $(C_h = \frac{A}{\rho g})$	$p_{12} = \frac{1}{C_h} \int Q dt$	$C_h \frac{p_{12}^2}{2}$
	Hőkapacitás	$\Phi = C_t \frac{dT_{12}}{dt}$ $(C_t = cm)$	$T_{12} = \frac{1}{C_t} \int \Phi dt$	$C_t T_{12}$
	Rugó	$F = c \int v_{12} dt$	$v_{12} = \frac{1}{c} \frac{dF}{dt}$	$\frac{F^2}{2c} = \frac{cx_{12}^2}{2}$
„A”- típusú tároló	Induktivitás	$i = \frac{1}{L} \int u_{12} dt$	$u_{12} = L \frac{di}{dt}$	$\frac{Li^2}{2}$
	Inertivitás	$Q = \frac{1}{L_h} \int p_{12} dt$ $(L_h = \frac{\rho l}{A})$	$p_{12} = L_h \frac{dQ}{dt}$	$\frac{L_h Q^2}{2}$
	Csillapító	$F = kv_{12}$	$v_{12} = \frac{F}{k}$	
	Ellenállás	$i = \frac{u_{12}}{R}$	$u_{12} = iR$	
„D” elem	Folyadék- ellenállás	$Q = \frac{p_{12}}{R_h}$	$p_{12} = QR_h$	-
	Hőellenállás	$\Phi = \frac{T_{12}}{R_t}$	$T_{12} = \Phi R_t$	

2.1.5. Mechanikai hatású mágneses elemek

Mechatronikai alkalmazásokban, különösen az aktuátorokban gyakoriak az elektromágnesek, melyek villamos energia felhasználásával erőt fejtenek ki.

a) Mágneses rugó

A mágneses rugó merevségének kiszámításához először a mágnes által kifejtett erőt kell meghatároznunk.



2.15. ábra

A mágneskör energiája (Mechatronika alapjai I)

$$E = \frac{Li^2}{2} \tag{2.23}$$

ahol $L=L(x)$ függvénye a geometriának, különösen a légrésnek. Ha a gerjesztő áramot állandó értéken tartjuk, akkor dx hatására a kör inductivitása dL -lel megváltozik, ami a mágneses kör energiáját is megváltoztatja. Az energiaváltozást a külső mechanikai rendszer munkája fedezi:

$$Fdx = dE \rightarrow F = \frac{dE}{dx} \tag{2.24}$$

Az energia (2.23) összefüggést állandó áram esetén deriválva és (2.24.)-be helyettesítve

$$F = \frac{i_0^2}{2} \cdot \frac{dL}{dx} \tag{2.25}$$

adódik. A mágneses rugó merevsége:

$$c_m = \frac{dF}{dx} = \frac{i_0^2}{2} \cdot \frac{d^2L}{dx^2} \Big|_{x=x_0} \quad (2.26)$$

A rugómerevség nemlineáris, konkrét értéke egy $x=x_0$ munkapontra vonatkozik.

b) Mágneses csillapítás

Egy L induktivitású tekercsben indukált feszültség Faraday törvénye szerint:

$$u_{12} = \frac{d}{dt}(Li)$$

Ha az áramot állandó értéken tartjuk, akkor

$$u_{12} = i_0 \frac{dL}{dt}$$

Mivel az induktivitás x függvénye, a láncszabály alkalmazásával

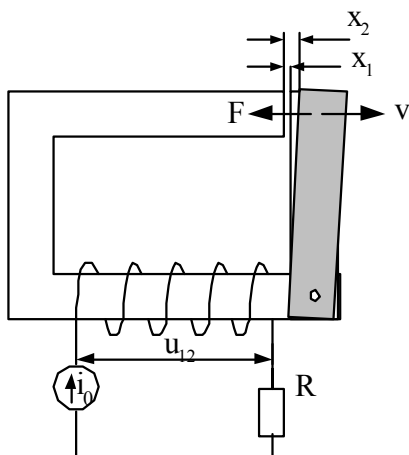
$$u_{12} = i_0 \frac{dL}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (2.27)$$

lesz. Ha a villamos áramkör zárt és ellenállása R , akkor az ellenálláson disszipálódó teljesítmény

$$P = \frac{u_{12}^2}{R}$$

A külső erő munkát végez, miközben az elmozdulást x_1 -ről x_2 -re változtatja. Eközben a tekercsben u_{12} feszültség indukálódik és a villamos energia az ellenálláson disszipálódik. Nagysága a mechanikai rendszer munkájával egyezik meg.

$$\int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_t^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{u_{12}^2}{R} dt$$



2.16. ábra

Helyettesítsük be az indukált feszültség (2.27) összefüggését, ezzel

$$\int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{t_1}^{t_2} \frac{i_0^2}{R} \left(\frac{dL}{dx} \right)^2 \left(\frac{dx}{dt} \right) \frac{dx}{dt} dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{i_0^2}{R} \left(\frac{dL}{dx} \right)^2 \dot{x} dx$$

A két integrandus összehasonlításából a sebességarányos csillapító erő a következő:

$$F = \frac{i_0^2}{R} \left(\frac{dL}{dx} \right)^2 \Big|_{x=x_0} \dot{x}$$

A csillapítási tényező értéke itt is egy munkapontban értelmezhető:

$$k_m = \frac{F}{v} = \frac{i_0^2}{R} \left(\frac{dL}{dx} \right)^2 \Big|_{x=x_0} \tag{2.28}$$

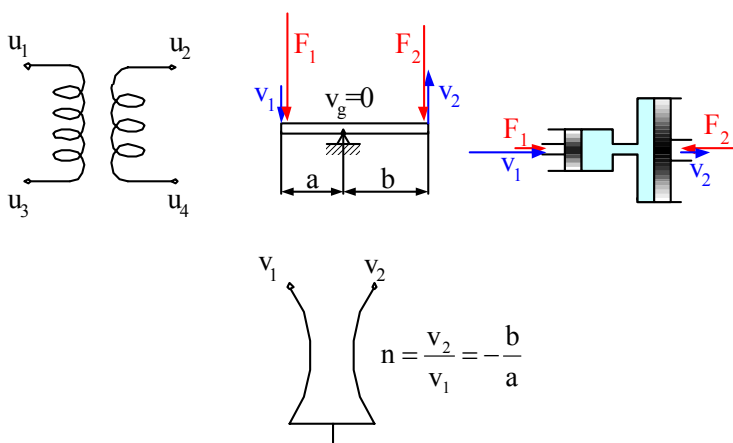
2.1.6. Átalakítók

Egy berendezés elemei között gyakran válik szükségessé a keresztváltozó és az átmenő változó értékének módosítása. Olyan összetett rendszerekben pedig, mint amilyenek a mechatronikai berendezések, a mechanikus, villamos, hidraulikus stb. rendszerelemek változónak átalakítása válik

szükségessé. Ideális átalakítók esetében a két oldal teljesítménye megegyezik:

$$f_1 v_{10} = f_2 v_{20} \tag{2.29}$$

A **transzformátor** olyan átalakító, mely azonos típusú elemek között módosítja a megfelelő változók értékét.

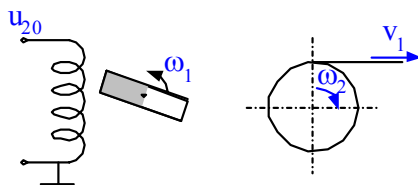


2.17. ábra. Transzformátorok

Transzformátor például az emelő, fogaskerék áttétel, hidraulikus sajtó.

A **váltó** olyan átalakító, mely vagy különböző típusú elemek között alakítja át a megfelelő változókat, vagy azonos típusú elemek között más rendszerre alakítja át a megfelelő változókat.

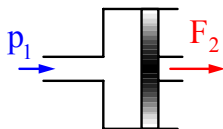
A váltók körébe tartozik a generátor, szalaghajtás, fogaskerék-fogasléc hajtás.



2.18. Váltók

Girátornak (zsrátor) nevezük az olyan átalakítót, mely különböző típusú elemek között végez átalakítást oly módon, hogy keresztváltozóból átmenő változót képez.

Például a hidraulikus munkahenger nyomásból erőt hoz létre (2.19. ábra).



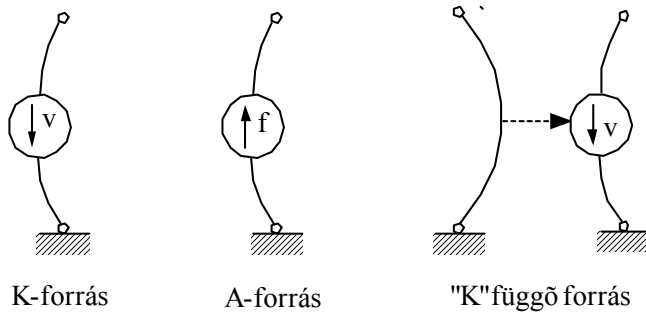
2.19. ábra

2.2. Aktív elemek

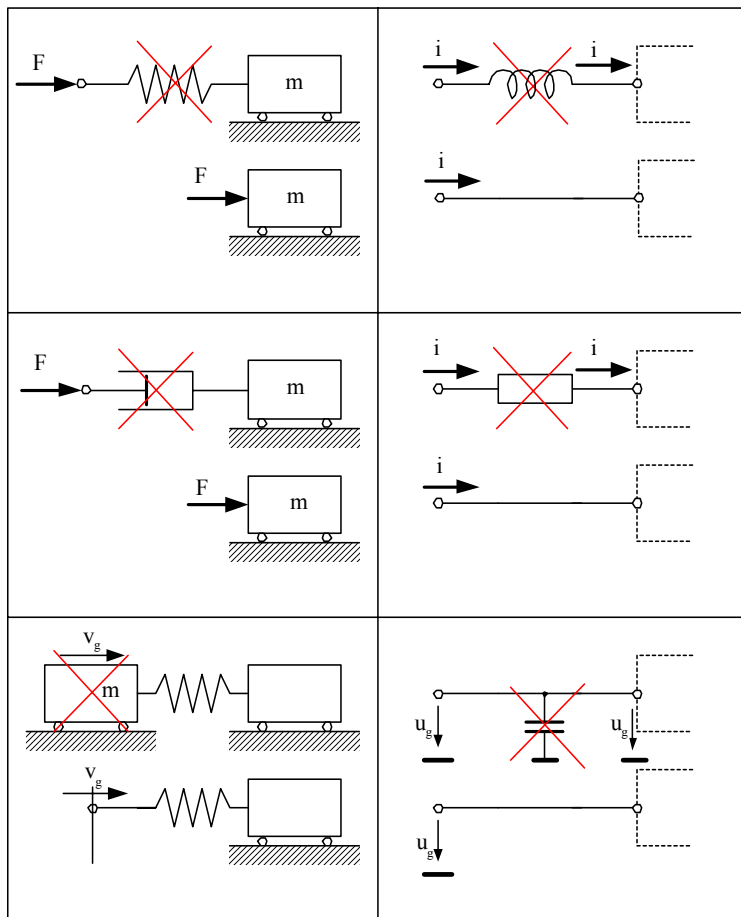
2.2.1. Források

A rendszer dinamikus működéséhez energiára van szükség. Az energiát a rendszer vagy a feltöltött tárolóiból nyeri (kezdeti feltételek nem nullák), vagy külső források biztosítják azt.

A valóságban ritkán fordul elő ideális forrás. A 2.20 ábrán bemutatott források csupán bizonyos vizsgálati szempontból modellezik a valóságos forrásokat. A források alkalmazásával kapcsolatban kerülni kell a 2.21. ábrán bemutatott értelmetlen eseteket, mint például a rugón keresztül történő erőerjesztést, vagy a tömegre közvetlenül ható útgerjesztést. A táblázatban példákat soroltunk fel az egyes forrástípusokra.



2.20. ábra



2.21. ábra

„K”-típusú forrás	Feszültséggenerátor, centrifugálszivattyú, sebesség-gerjesztés
„A”-típusú forrás	Áramgenerátor, térfogatkiszorítás elvén működő szivattyú, erőgerjesztés
„K”-típusú függő forrás	Műveleti erősítő, segédenergiával működő mérőjelátalakító
„A”-típusú függő forrás	Tranzisztor, tirisztor, fotocella

3. Rendszervizsgálat

A rendszervizsgálat történhet a valós rendszeren végrehajtott mérésekkel, vagy a rendszer modelljén végzett vizsgálatokkal. A rendszer bemenetére mindkét esetben tipikus vizsgálójelekkel gerjesztjük, miközben a kimenőjelekből következtetünk a rendszer struktúrájára (rendszer identifikáció), vagy a rendszer elemeinek értékeire (paraméter identifikáció). A rendszervizsgálat történhet idő, frekvencia és operátor tartományban.

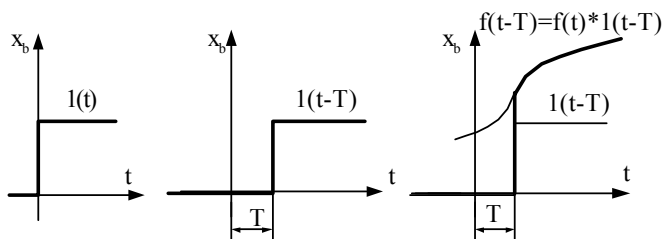
3.1. Tipikus gerjesztések (vizsgálójelek)

A rendszer dinamikus viselkedése a rendszer vizsgálatának kezdeti pillanatban lévő állapotától (a kezdeti feltételektől, az energiatárolók feltöltöttségétől), valamint a bemenő jeltől függ. A vizsgáló jelek lehetnek determinisztikusak és sztochasztikusak.

A determinisztikus jel értéke minden pillanatban adott, könnyen előálítható és reprodukálható. A fontosabb determinisztikus vizsgáló jelek a következők:

a) Egységugrás-függvény, $1(t)$.

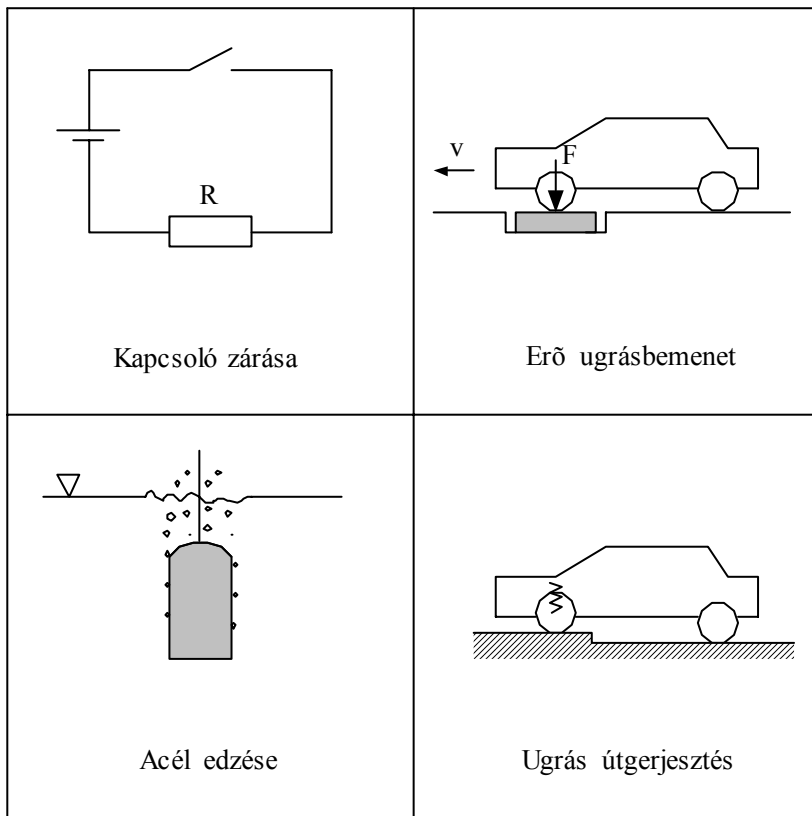
Talán a leggyakrabban alkalmazott vizsgálójel. Tulajdonképpen egy állandó értékű jel $t=0$ -kor történő bekapcsolásáról van szó. Amennyiben a jel értéke nem egységnyi, úgy konstanssal szorzott értékével számolunk. Az időben T -vel eltoltságot $1(t-T)$ -vel jelöljük. Egy tetszőleges $f(t)$ függvény bekapcsolása az ugrásfüggvénnyel való szorzással állítható elő.



3.1. ábra. Egységugrás függvény

A rendszer egységugrás-függvény bemenetre adott válaszát *átmeneti függvénynek* nevezzük. Az elnevezés arra utal, hogy a rendszer terheletlen állá-

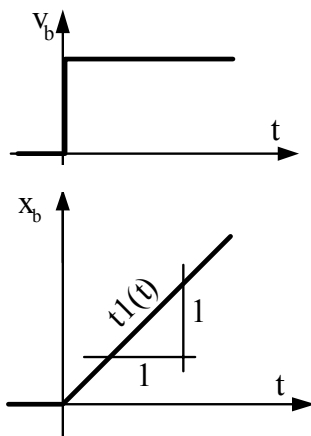
potából átmegegy állandó értékkel terhelt állapotába. A rendszer ugrásfüggvénnyel való gerjesztésére mutat néhány példát a 3.2. ábra.



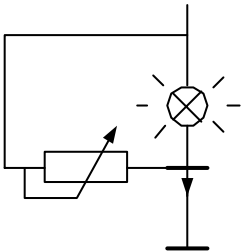
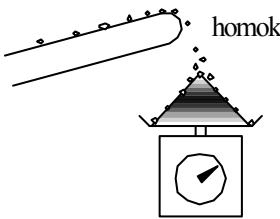
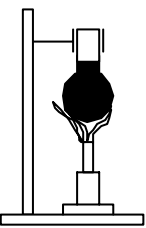
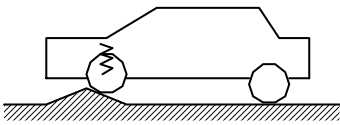
3.2. ábra. Gyakorlati példák ugrásbemenetre

b) Egységnyi sebességugrás bemenet, $t \cdot 1(t)$.

Ez a vizsgáló jel $t < 0$ esetén zérus értékű, egyébként egységnyi meredekségű. Az egységugrás jel idő szerinti integráltjaként is felfogható (3.3. ábra). A 3.4. ábrán az egység-sebességugrás gyakorlati megvalósítására láthatunk néhány példát.



3.3. ábra. Egység sebességugrás.

 <p>Áram egyenletes növelése</p>	 <p>Erő egyenletes növekedése</p>
 <p>Hőmérséklet egyenletes emelkedése</p>	 <p>Ramp útgerjesztés</p>

3.4. ábra. Gyakorlati példák egység-sebességugrás jel megvalósítására

c) Egységimpulzus, vagy Dirac-delta, $\delta(t)$.

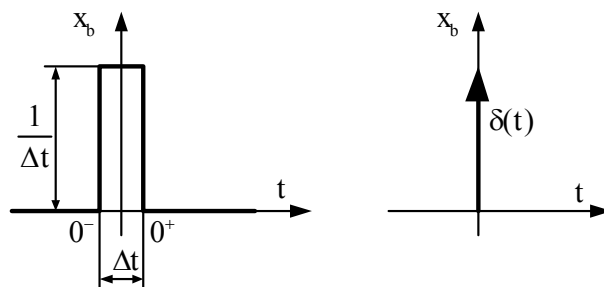
A rendszert egységnyi területű impulzus éri, melynek ideje zérushoz tart. Az impulzus elméletileg zérus idő alatt, 0^- és 0^+ között hat. Az amplitúdója végtelenhez tart, miközben az impulzus véges nagyságú:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (3.1)$$

Az impulzus alatt most nem csak a hagyományos értelemben vett erőimpulzust értjük. Az impulzus amplitúdója bármely extenzív mennyiség lehet. Ennek megfelelően mértékegysége is változó.

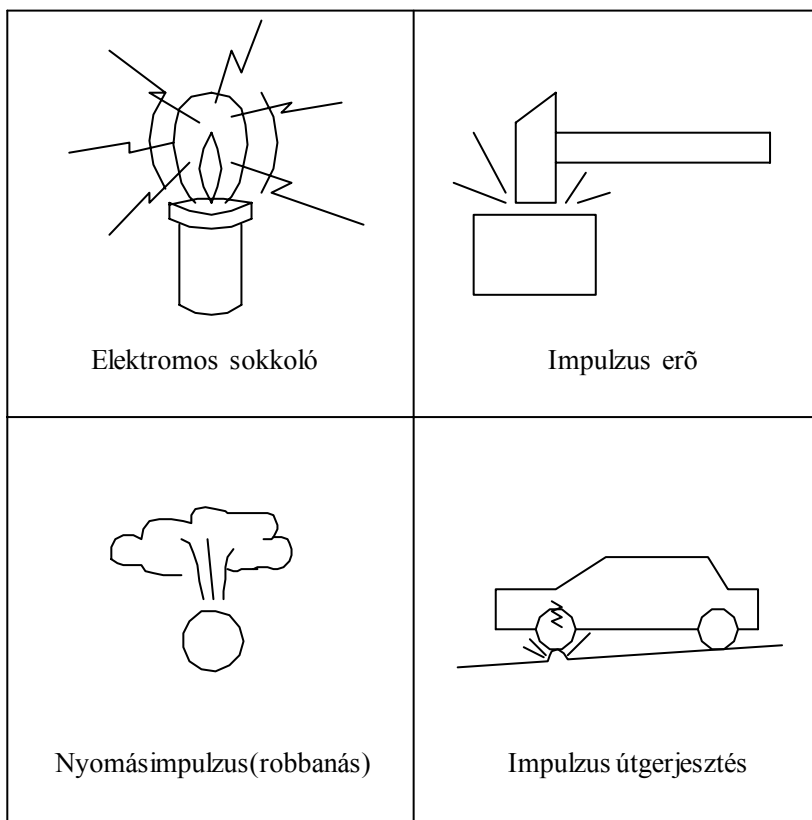
Az impulzusgerjesztéssel a rendszerek jól vizsgálhatók, mivel a tranziens alatt semmilyen bemenet sem terheli a rendszert, így annak viselkedését kizárólag saját felépítése és jellemző paraméterei befolyásolják

Az impulzusgerjesztésre adott időtartománybeli választ *súlyfüggvénynek* nevezzük. Jele: $w(t)$.



3.5. ábra. Impulzusgerjesztés (Dirac-delta)

Matematikailag kimutatható, hogy az impulzus gerjesztésben valamennyi szinuszos gerjesztőjel-összetevő azonos amplitúdóval van jelen. Szokás még fehérzajnak is nevezni. A rendszerek frekvencia-tartományú vizsgálatakor egyetlen impulzusgerjesztéssel és a kimenőjel *Fourier*-transzformációjával megkaphatjuk a rendszer válaszát az összes lehetséges körfrekvenciájú bemenőjelre. A 3.6. ábrán az impulzusgerjesztés néhány gyakorlati megvalósítását láthatjuk.



3.6. ábra. Gyakorlati példák impulzus bemenetre.

d) Szinuszos gerjesztés

Az

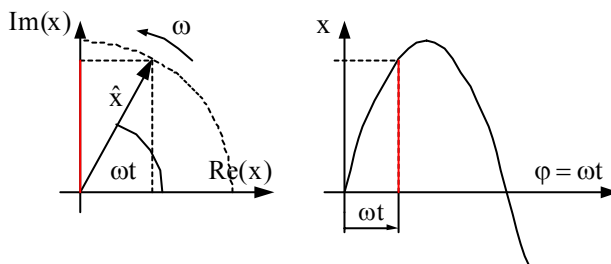
$$x_b = \hat{x}_b \sin \omega t \tag{3.2}$$

frekvenciagerjesztés felírható egy \hat{x} állandó abszolút értékű komplex szám képzetes részeként (független vetületeként):

$$x_b = \text{Im}[\hat{x}_b (\cos \omega t + j \sin \omega t)] \tag{3.2}$$

A komplex szám exponenciális alakját alkalmazva még egyszerűbb jelölést alkalmazhatunk:

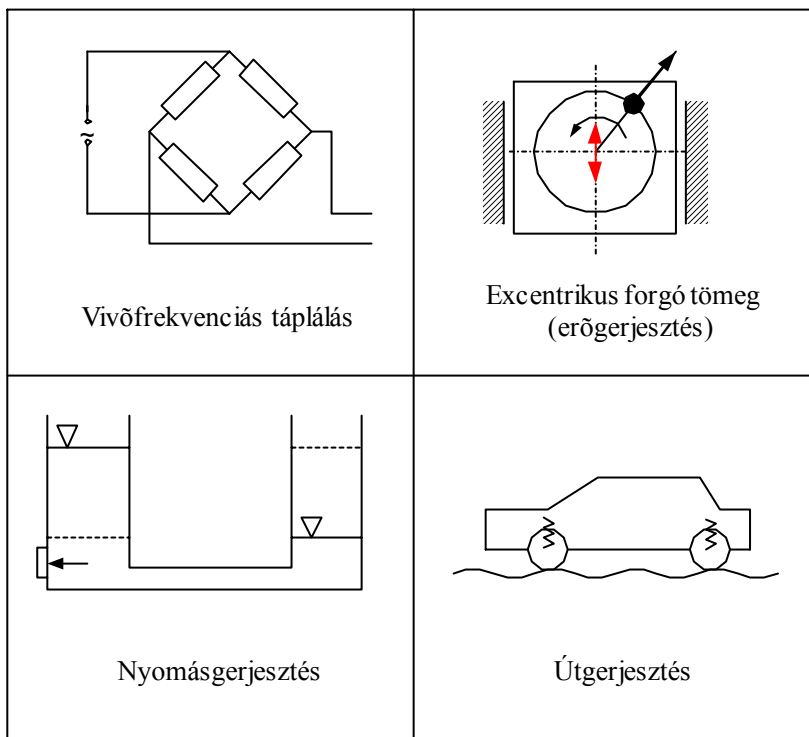
$$x_b = \text{Im}[\hat{x}_b e^{j\omega t}] \tag{3.3}$$



3.7. ábra. Szinuszos gerjesztés

Ez a gerjesztés többletinformációt ad a rendszerről, ha különböző kör-frekvenciájú bemenőjelekkel is elvégezzük a vizsgálatot.

A szinuszos gerjesztés további előnye, hogy több, megfelelő amplitúdójú szinuszos bemenőjel kombinációjával tetszőleges periodikus bemenőjel állítható elő (*Fourier-sorfejtés*).



3.8. ábra. Gyakorlati példák szinuszos gerjesztésre.

3.2. A rendszeregyenlet felírása

A vizsgálandó rendszer matematikai modellje nem más, mint a rendszer bemenete és kimenete közötti kapcsolatot leíró rendszeregyenlet.

A rendszeregyenlet bal oldalán a kimenő jel és deriváltjai, a jobb oldalán a bemenő jel és ha van, annak deriváltjai állnak.

A következő részben a rendszeregyenlet felírásának módszereit tárgyaljuk.

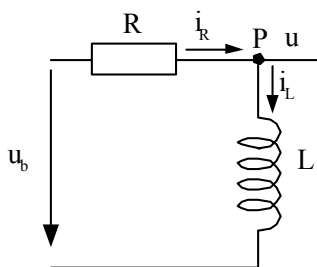
a) Csomóponti módszer

Az elektrotechnikából ismert Kirchoff-egyenlet általános megfogalmazása.

Egy csomópontba belépő és onnan kilépő extenzívek áramának előjelhelyes összege zérus:

$$\sum f_i = 0 \quad (3.4)$$

Például írjuk fel a következő soros RL kör rendszeregyenletét, ha a bemenet u_b , a kimenet u !



3.9. ábra

Írjuk fel a (3.4) csomóponti tételt a P csomópontra (az áramkör terheletlen):

$$\sum i = 0 = i_R - i_L \quad (3.5)$$

majd az elemek áramokra rendezett egyenleteit helyettesítsük be:

$$0 = \frac{u_b - u}{R} - \frac{1}{L} \int u dt \quad (3.6)$$

A rendszeregyenlet szokásosan nem integrál, hanem differenciálegyenlet. Ezért az integrál eltüntetése érdekében deriváljuk az egyenletet:

$$0 = \frac{1}{R} \cdot \frac{du_b}{dt} - \frac{1}{R} \cdot \frac{du}{dt} - \frac{1}{L} u \quad (3.7)$$

A rendszeregyenlet úgy rendezzük, hogy a bal oldalon a kimeneti jellemzők, a jobb oldalon a bemeneti mennyiségek álljanak:

$$\underline{\underline{\frac{L}{R} \cdot \frac{du}{dt} + u = \frac{L}{R} \cdot \frac{du_b}{dt}}} \quad (3.8)$$

A rendszeregyenletet megvizsgálva két következtetést vonhatunk le: a bal oldalon az ismeretlen feszültség első deriváltja a legmagasabb fokú derivált → a rendszer elsőrendű. Ennek megfelelően a rendszerben egy energiatároló van: a tekercs.

b) Hurok módszer

Zárt hurokban az intenzív jellemzők előjelhelyes összege zérus:

$$\sum u_i = 0 \quad (3.9)$$

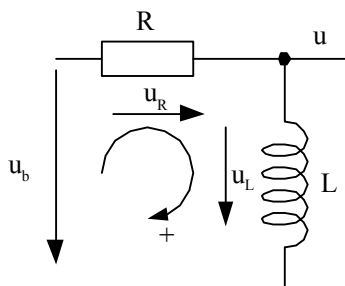
Legyen a 3.10. ábrán látható soros RL kör bemenete u_b , kimenete az i áram.

Írjuk fel a (3.9) huroktörvényt! A feszültség akkor pozitív, ha a feszültség iránya megegyezik a választott pozitív körüljárási iránnyal:

$$\sum u_i = 0 = u_R + u_L - u_b \quad (3.10)$$

Az elemek áramra rendezett egyenleteit helyettesítsük a fenti egyenletbe:

$$0 = iR + L \frac{di}{dt} - u_b$$



3.10. ábra

A kimenőjelet tartalmazó tagokat a bal oldalra rendezzük:

$$\frac{L}{R} \cdot \frac{di}{dt} + i = \frac{u_b}{R} \quad (3.11)$$

c) Energia módszer

A rendszer időegység alatt felvett energiája (teljesítménye) egyenlő az időegység alatt tárolt energia és a veszteségteljesítmény összegével.

$$P_{be} = \frac{d}{dt} E_t + P_v \quad (3.12)$$

Alkalmazzuk az energiamódszert az előző példára! A (3.12) alapegyenletbe az áramra rendezett teljesítményeket helyettesítjük:

$$u_b i = \frac{d}{dt} \left(\frac{L i^2}{2} \right) + i^2 R \quad (3.13)$$

Elvégezzük a deriválást,

$$u_b i = 2 \frac{L}{2} i \frac{di}{dt} + i^2 R \quad (3.14)$$

majd egyszerűsítünk i -vel és rendezzük az egyenletet:

$$\underline{\underline{\frac{L}{R} \cdot \frac{di}{dt} + i = \frac{u_b}{R}}} \quad (3.15)$$

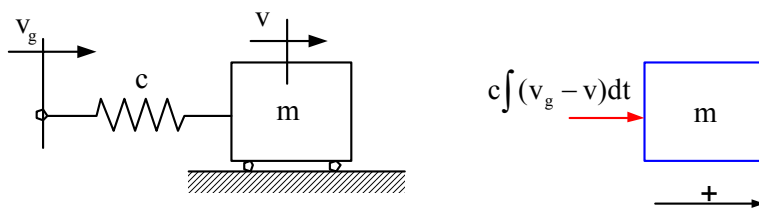
Az eddig bemutatott rendszerek egyenleteiben az volt a közös, hogy az ismeretlen mennyiség első rendű deriváltja szerepelt bennük. Az ilyen ún. *első rendű rendszerekben* csupán egy energiatároló található.

d) A dinamika alaptételének alkalmazása

Mechanikus rendszerekre Newton II. axiómáját alkalmazhatjuk előnyösen:

$$\sum F_i = ma \quad (3.16)$$

Példaként írjuk fel az alábbi mechanikus rendszer egyenletét, ha a bemenet a rugó végpontjának v_g sebessége, kimenet a tömeg v sebessége.



3.11. ábra

Először lerajzoljuk a vizsgált testet a ráható erőkkel („free body diagram”). Most csupán a rugóerő hat x -irányban, mely a rugó hosszváltozásával arányos. Helyettesítsünk a dinamika (3.16) alaptörvényébe:

$$c \int (v_g - v) dt = m \frac{dv}{dt} \quad (3.17)$$

Deriválással átalakítjuk az egyenletet differenciálegyenletté:

$$c(v_g - v) = m \frac{d^2v}{dt^2} \quad (3.18)$$

A kimeneti mennyiségeket bal oldalra rendezzük:

$$\underline{\underline{m \frac{d^2v}{dt^2} + cv = cv_g}} \quad (3.19)$$

A rendszeregyenletben a legmagasabb fokú derivált az ismeretlen sebesség második deriváltja (másodrendű rendszer). Ennek megfelelően a rendszerben két független energiatároló van: a rugó és a tömeg.

e) Keresztváltozó osztó

Részletesen a 4.3.4. fejezetben kerül ismertetésre.

3.3. A rendszeregyenlet helyességének ellenőrzése

Érdeemes kihasználni néhány lehetőséget - különösen bonyolultabb rendszerek esetén - a rendszeregyenlet helyességének ellenőrzésére.

- a) Dimenziók ellenőrzése. Az egyenlet összes tagjának azonos dimenziójúnak kell lenni. A (3.19) egyenletre:

$$\left[\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^3} \right] + \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \right] = \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

- b) Határesetek vizsgálata.

Kimerevítés: legyen a rugómerevség végtelen. Ekkor a rendszeregyenlet összes tagját osztva c -vel, majd $c \rightarrow \infty$ határátmenetet képezve

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{m}{c} \frac{d^2v}{dt^2} + v = v_g \rightarrow v = v_g$$

A tömeg sebessége megegyezik a gerjesztéssel, ami megfelel annak, hogy merev rugót tételeztünk fel.

Tömeg elbággyása:

A rugó két végpontja az elvárásnak megfelelően együtt mozog.

$$\lim_{m \rightarrow 0} m \frac{d^2 v}{dt^2} + cv = cv_g \rightarrow v = v_g$$

3.4. Rendszerek tipizálása a rendszeregyenlet alapján

A rendszereket a működésüket leíró (3.20) rendszeregyenletük alapján osztályozhatjuk. Az azonos típusú rendszerek hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek, mely alapján előre megjósolhatjuk viselkedésüket. Az osztályozás alapja a differenciálegyenlet rendűsége.

A vizsgált rendszer rendszáma megegyezik a kimenőjel legmagasabb deriváltjának rendszámával. A rendszer a rendszámával megegyező számú független energiatárolót tartalmaz.

$$a_m \frac{d^m x}{dt^m} + \dots + a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + \underbrace{a_0 x = b_0 x_b}_{\text{nulladrendű}} + b_1 \frac{dx_b}{dt} + \dots + b_n \frac{d^n x_b}{dt^n} \quad (3.20)$$

első
másodrendű rendszer

A **nulladrendű** rendszer nem tartalmaz időfüggő tagokat. A kimenőjel azonnal követi a bemenőjelet. A rendszert a $K=b_0/a_0$ statikus erősítés jellemzi. Nulladrendű rendszer például egy feszültségosztó, vagy egy két-karú emelő.

Az **elsőrendű** rendszer kimenő jele csak bizonyos idő után éri el a statikus erősítés által meghatározott állandósult értéket, mivel a rendszer tar-

talmaz egy energiatárolót. A jel exponenciális görbe szerint változik. A jel időbeli változására az **időállandó** jellemző.

A **másodrendű** rendszer két független energiatárolót tartalmaz. Az energia a két tároló között ide-oda áramolhat, ezért a másodrendű rendszer lengésekre képes. A rendszert a statikus erősítésen kívül alapvetően a lengések **körfrekvenciája** és a **csillapodás mértéke** jellemzi.

Bizonyos esetekben a rendszeregyenlet jobb oldala zérus, amit a matematikában „homogén differenciálegyenletnek” neveznek. Ez az eset akkor fordul elő, amikor a rendszerre nem kapcsolunk forrást (gerjesztést).

A rendszer kimenete ilyenkor vagy állandó, vagy változó. Ha a rendszer egyensúlyi állapotban van, akkor a kimenet nem változik. Ha azonban a rendszer tartalmaz energiatároló(ka)t és a rendszer nincs egyensúlyi állapotban, a kimenőjel változni fog az egyensúlyi állapot eléréséig. A 3.5. pontban néhány példával illusztráljuk a gerjesztés nélküli esetet.

3.5. Analógiák

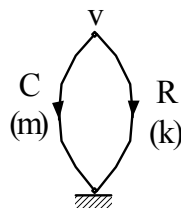
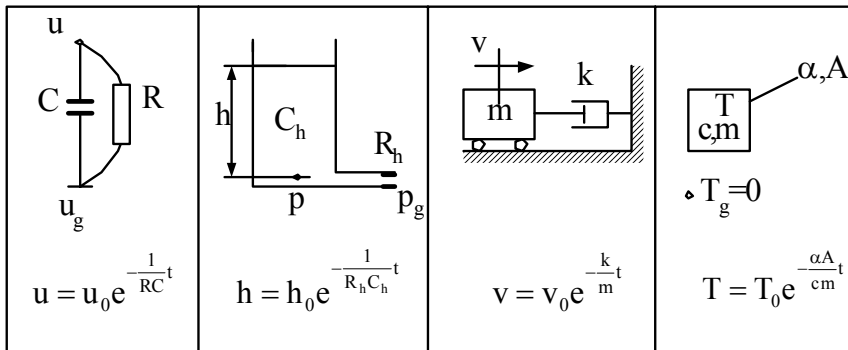
A 3.12. ábrán néhány egyszerű villamos, mechanikus, hidraulikus és termikus problémákat mutatunk, melyek közös tulajdonsága, hogy

- nincsenek gerjesztve
- egy energiatárolót tartalmaznak
- nincsenek egyensúlyi állapotban
- azonos típusú a rendszeregyenletük.

Az első ábrán egy u_0 feszültségre feltöltött kondenzátor ellenállással való kisütése látható. A második részlet egy fojtással szabályozott tartály vízszintjének változását ábrázolja ürítés közben. A következő rajz egy v_0 sebességgel meglökött tömeg csillapítóval való fékezését mutatja. Az utolsó részlet egy T_0 hőmérsékletű, A felületű tárgy hűlését mutatja.

A bemutatott rendszerek rendszeregyenleteinek felírását az olvasóra bízuk. Vegyük észre, hogy mind a négy eset azonos típusú (elsőrendű, homogén) rendszeregyenlettel írható le.

Analóg rendszereknek nevezzük az azonos típusú rendszeregyenlettel jellemezhető, különböző típusú (villamos, mechanikus,...) rendszereket.



3.12. ábra

4. A rendszeregyenlet megoldása

4.1. Megoldás az időtartományban

A rendszer állapota, bemenő és kimenő jeleinek összessége az időben változik, ezért kézenfekvő a rendszer időtartományban való vizsgálata.

A koncentrált paraméterű rendszerek viselkedését állandó együtthatós differenciálegyenletek írják le.

Differenciálegyenletnek nevezünk az olyan egyenletet, melyben a változón kívül annak differenciálhányadosai is szerepelnek.

A

$$a_m \frac{d^m x}{dt^m} + \dots + a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_n \frac{d^n x_b}{dt^n} + \dots + b_1 \frac{dx_b}{dt} + b_0 x_b \quad (4.1)$$

egyenlet egy ún. m -ed rendű (a kimenőjel legmagasabb fokszámú deriváltja $=m$), állandó együtthatós (a_i és b_i állandó, nem függ az időtől és a helytől), közönséges (a differenciálhányadosok egyváltozósak, nem parciálisak), inhomogén (az egyenlet jobb oldala zérustól különböző), lineáris (nem szerepel a változók és deriváltjaik szorzata, négyzete, vagy egyéb függvénye) differenciálegyenlet. A jobb oldalon álló tagok fokszáma általában kisebb, mint a bal oldali tagok fokszáma: $m \geq n$. A jobb oldal zérustól különböző volta a rendszer gerjesztett állapotára utal, melyet valamilyen előírt bemenőjel okoz.

Célunk a kezdeti feltételeket kielégítő $x(t)$ függvény meghatározása.

Amennyiben a differenciálegyenlet jobb oldala zérus, úgy homogén differenciálegyenletről beszélünk.

$$a_m \frac{d^m x_h}{dt^m} + \dots + a_2 \frac{d^2 x_h}{dt^2} + a_1 \frac{dx_h}{dt} + a_0 x_h = 0 \quad (4.2)$$

Ilyenkor a rendszer gerjesztetlen, x_h csakis azért változik az idő függvényében, mert a rendszert egyensúlyi állapotától eltérő kezdeti feltételekkel indítottuk el és hagytuk magára. Mindig annyi független kezdeti feltételt kell ismernünk és megadnunk, amennyi a differenciálegyenlet rendszáma.

Egy inhomogén differenciálegyenlet megoldása a homogén rész általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összegeként állítható elő:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (4.3)$$

A megoldás homogén része a rendszer felépítésétől függ és a tranziens (közvetlenül a bekapcsolás utáni) megoldásrészt írja le. A partikuláris megoldás a gerjesztéstől függ és a rendszer állandósult válaszát reprezentálja.

4.1.1. Elsőrendű differenciálegyenlet megoldása

A megoldás menetét egy példán mutatjuk be. Legyen a feladat a

$$3 \frac{dx}{dt} + x = 2t + 1 \quad (4.4)$$

differenciálegyenlet megoldása $x(t=0)=4$ kezdeti feltétellel.

Először a **homogén** differenciálegyenletet oldjuk meg (a jobb oldalt zérussal tesszük egyenlővé):

$$3 \frac{dx_h}{dt} + x_h = 0 \quad (4.5)$$

A változók szeparálásával (szétválasztásával, egy-egy oldalra rendezésével) a következő alakra hozzuk:

$$\frac{dx_h}{x_h} = -\frac{1}{3} dt \quad (4.6)$$

Ez az egyenlet kvadratúrával (integrálással) egyszerűen megoldható:

$$\ln x_h = -\frac{1}{3}t + C \quad (4.7)$$

Áttérve az exponenciális alakra

$$x_h = e^{-\frac{1}{3}t+C} = e^C e^{-\frac{1}{3}t} = Ae^{-\frac{1}{3}t} \quad (4.8)$$

ahol „A” egyelőre ismeretlen integrálási állandó.

Az **inhomogén egyenlet** egy partikuláris megoldását többnyire próbálgatással keressük meg. Segít a próbálgatásban az a tény, hogy a partikuláris megoldás (a rendszer állandósult válasza) hasonló, mint a gerjesztés (a jobb oldal zavarófüggvénye). Ezért keressük a partikuláris megoldást

$$x_p = Bt + E \quad (4.9)$$

alakban (B és E egyelőre ismeretlen). A partikuláris megoldásnak is ki kell elégítenie az eredeti egyenletet:

$$3 \frac{d(Bt + E)}{dt} + (Bt + E) = 2t + 1 \quad (4.10)$$

A műveletek elvégzése után a

$$3B + Bt + E = 2t + 1 \quad (4.11)$$

egyenlőséget kapjuk. Az együtthatók összehasonlításából $B=2$ és $E=-5$ adódik, amivel a partikuláris megoldás

$$x_p = 2t - 5 \quad (4.12)$$

A differenciálegyenlet általános megoldása (4.3) szerint tehát

$$x = x_h + x_p = Ae^{-\frac{1}{3}t} + 2t - 5 \quad (4.13)$$

alakú.

Az ismeretlen „A” integrálási konstans a kezdeti feltétel figyelembevételével tudjuk meghatározni.

Ha $t=0$, akkor $x(0)=4$ értékét (4.13)-ba helyettesítve

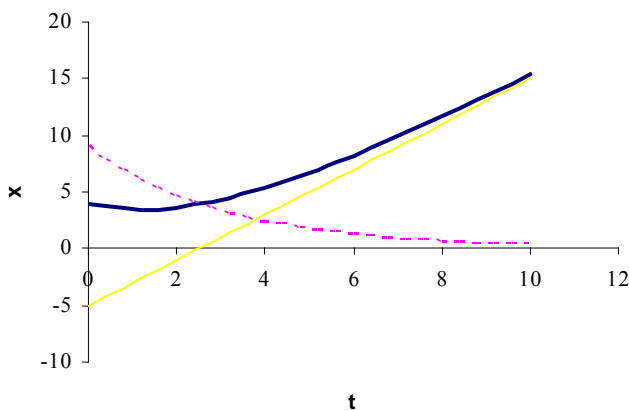
$$4 = Ae^{-\frac{1}{3} \cdot 0} + 2 \cdot 0 - 5 \quad (4.14)$$

ahonnan $A=9$ adódik.

A differenciálegyenlet megoldása ezzel:

$$x = \underline{\underline{9e^{-\frac{1}{3}t} + 2t - 5}} \quad (4.15).$$

A megoldást a 4.1. ábrán a vastag kék vonal ábrázolja. A megoldás homogén része (a tranziens, piros szaggatott vonallal ábrázolva) az idő előrehaladtával elhal. A megoldás minden határon túl közeledik az állandósult megoldáshoz (sárga egyenes vonal).



4.1. ábra. A (4.4) differenciálegyenlet megoldása.

Időálló

Elsőrendű differenciálegyenlettel leírható elsőrendű rendszer legfontosabb jellemzője az időálló.

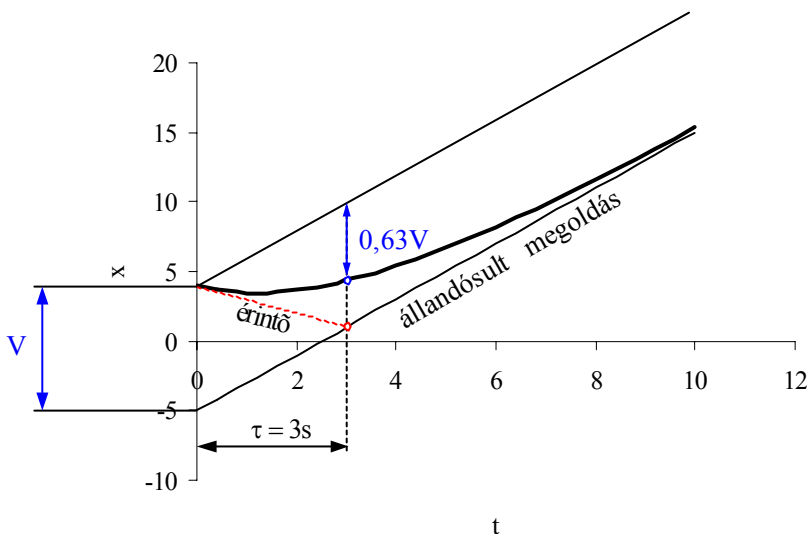
Időállandónak nevezzük azt az időértéket, mikor a megoldásfüggvény exponenciális tagjának kitevője -1 értéket vesz fel.

Az exponenciális tag felírható $e^{-\frac{1}{\tau}t}$ alakban. Az időállandó az előbbi példában $\tau=3$ s. Amikor az idő éppen megegyezik az időállandóval, az exponenciális függvény

$$e^{-1} = 0,3678..$$

értéket vesz fel. Ez a következő állítással egyenértékű:

Időállandónyi idő elteltével a megoldásfüggvény a teljes jelváltozás 36,7 százalékával tér el az állandósult megoldástól. Más megfogalmazásban időállandónyi idő elteltekor a teljes jelváltozás 63,3 százaléka következik be.



4.2. ábra. Időállandó

A példa adataival a teljes jelváltozás a kezdő pont ($x_0=4$) és az állandósult megoldás aszimptotájának függőleges tengellyel való metszéspontja ($x=-5$) között mért függőleges szakasz hossza, $V=9$ (4.2. ábra). Ez az érték

egyébként megegyezik a (4.15) megoldás $9e^{-\frac{t}{3}}$ exponenciális tagjának együtthatójával.

Az időállandó egy másik definícióját a következő megfontolásból származtathatjuk. Írjuk fel a megoldásgörbe érintőjének egyenletét a kezdőpontban! Az érintő meredeksége:

$$m_0 = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = \left[\left(-\frac{1}{3} \right) 9e^{-\frac{t}{3}} + 2 \right] \Big|_{t=0} = -1 \quad (4.16)$$

Az érintő egyenlete

$$x = m_0 t + x_0 = -t + 4 \quad (4.17)$$

Határozzuk meg ezek után az érintő, valamint a (4.12) állandósult (partikuláris) megoldás $x_p = 2t - 5$ egyenletének metszéspontját!

$$-t + 4 = 2t - 5 \quad (4.18)$$

Megoldásul $t=3$ $s=\tau$ adódik. Ebből következik az időállandó másik megfogalmazása:

A megoldásgörbe kezdőpontbeli érintője τ időállandó elteltével metszi az állandósult megoldás egyenesét.

4.1.2. Másodrendű differenciálegyenlet.

Tekintsük a következő differenciálegyenletet az ismert a_2, a_1, a_0, b_0 paraméterekkel:

$$a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_0 t \quad (4.19)$$

Alakítsuk át az egyenletet úgy, hogy a másodrendű derivált együtthatója 1 legyen:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{a_1}{a_2} \frac{dx}{dt} + \frac{a_0}{a_2} x = \frac{b_0}{a_2} t$$

Vezessük be az alábbi paramétereket a lengésekre képes másodrendű rendszer dinamikájának jellemzésére:

$$\text{Csillapítatlan sajátfrekvencia: } \alpha = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \quad (4.20)$$

$$\text{Lehr-féle csillapítás } D = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} \quad (4.21)$$

A differenciálegyenlet a szokásos jelölésekkel a következő alakú:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2D\alpha \frac{dx}{dt} + \alpha^2 x = \frac{b_0}{a_2} t \quad (4.22)$$

Először a **homogén egyenlet** megoldását keressük:

$$\frac{d^2 x_h}{dt^2} + 2D\alpha \frac{dx_h}{dt} + \alpha^2 x_h = 0 \quad (4.23)$$

Tételezzük fel, hogy egy lehetséges megoldás $x_h = Ae^{\lambda t}$ alakú.

A differenciálegyenletbe való visszahelyettesítés után

$$(\lambda^2 + 2D\alpha\lambda + \alpha^2)Ae^{\lambda t} = 0 \quad (4.24)$$

A feltételezett megoldás kielégíti az egyenletet, ha a zárójelben lévő kifejezés zérus. Ezt karakterisztikus egyenletnek nevezzük:

$$\lambda^2 + 2D\alpha\lambda + \alpha^2 = 0 \quad (4.25)$$

A másodfokú egyenlet két különböző gyöke vagy valós, vagy konjugált komplex, a gyökjel alatti kifejezés előjelétől függően.

$$\lambda_1 = -D\alpha + \frac{\sqrt{4D^2\alpha^2 - 4\alpha^2}}{2} = \alpha(-D + \sqrt{D^2 - 1})$$

$$\lambda_2 = -D\alpha - \frac{\sqrt{4D^2\alpha^2 - 4\alpha^2}}{2} = \alpha(-D - \sqrt{D^2 - 1}) \quad (4.26)$$

a) eset

Ha $D > 1$ (túlcsillapított eset), akkor két valós gyök létezik, melyek lineáris kombinációjaként adódik a megoldás:

$$x_h = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (4.27)$$

b) eset

Ha $D < 1$ (alulcsillapított eset, ez a gyakoribb). A gyökjel alatt negatív szám áll. Ekkor a konjugált komplex gyököket

$$\lambda_1 = \alpha(-D + j\sqrt{1 - D^2}) = -\beta + j\gamma$$

$$\lambda_2 = \alpha(-D - j\sqrt{1 - D^2}) = -\beta - j\gamma \quad (4.28)$$

alakban írhatjuk fel. A megoldás ezzel

$$x_h = A_1 e^{(-\beta + j\gamma)t} + A_2 e^{(-\beta - j\gamma)t} = e^{-\beta t} (A_1 e^{j\gamma t} + A_2 e^{-j\gamma t}) \quad (4.29)$$

Az imaginárius kitevők kiküszöbölése érdekében alkalmazzuk a komplex számok ismert $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$ trigonometrikus alakját:

$$x_h = e^{-\beta t} (A_1 \cos \gamma t + A_1 j \sin \gamma t + A_2 \cos \gamma t - A_2 j \sin \gamma t) =$$

$$= e^{-\beta t} \left[\underline{\cos \gamma t} (A_1 + A_2) + \underline{j \sin \gamma t} (A_1 - A_2) \right] \quad (4.30)$$

Most megmutatjuk, hogy a szögletes zárójelben álló kifejezés felírható a tisztán valós számokból álló

$$K \sin(\gamma t + \varepsilon) = K \underline{\sin \gamma t} \cos \varepsilon + K \underline{\cos \gamma t} \sin \varepsilon \quad (4.31)$$

kifejezéssel. Mivel $\sin \gamma t$ és $\cos \gamma t$ együtthatóinak a két kifejezésben minden pillanatban meg kell egyezniük, az együtthatók egyenlősége alapján írhatjuk:

$$\begin{aligned} \sin \gamma t : \quad j(A_1 - A_2) &= K \cos \varepsilon \\ \underline{\underline{\cos \gamma t}} : \quad A_1 + A_2 &= K \sin \varepsilon \end{aligned} \quad (4.32)$$

Emeljük négyzetre és adjuk össze (4.32 a és 4.32 b) egyenleteket, ekkor eltűnik a képzetes egység ($j^2 = -1$):

$$\begin{aligned} -1(A_1 - A_2)^2 &= K^2 \cos^2 \varepsilon \\ (A_1 + A_2)^2 &= K^2 \sin^2 \varepsilon \\ \hline 4A_1A_2 &= K^2 \\ \varepsilon &= \arcsin \frac{A_1 + A_2}{\sqrt{A_1A_2}} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Ezzel beláttuk, hogy a K és ε integrálási konstans valós szám (nem tartalmaz j -t).

A homogén rész megoldása ezzel

$$x_h = Ke^{-\beta t} \sin(\gamma t + \varepsilon) \quad (4.34)$$

alakban adódik (csillapodó szinuszos rezgés ε fázisszöggel).

Érdemes megfigyelni, hogy a rezgés lefolyása a (4.28) egyenletben bevezetett $\gamma = \alpha\sqrt{1 - D^2}$ (a rezgés csillapított sajátfrekvenciája) és $\beta = \alpha D$ (a rezgés burkológörbéjének exponenciális kitevője) paraméterekkel jellemezhető.

Partikuláris megoldás

A partikuláris megoldást keressük a gerjesztéshez hasonló alakban (B és C egyelőre ismeretlen)

$$x_p = Bt + C \quad (4.35)$$

A feltételezett partikuláris megoldást a differenciálegyenletbe helyettesítve:

$$2D\alpha B + \alpha^2 (Bt + C) = \frac{b_0}{a_2} t \quad (4.36)$$

Mivel az egyenlet két oldalának minden pillanatban meg kell egyeznie, az együtthatók egyenlősége alapján írhatjuk:

$$t^1 : \alpha^2 B = \frac{b_0}{a_2} \quad \rightarrow B = \frac{b_0}{a_2 \alpha^2} = \frac{b_0}{a_0}$$

$$t^0 : 2D\alpha B + \alpha^2 C = 0 \quad \rightarrow C = -\frac{2DB}{\alpha} = -\frac{a_1 b_0}{a_0^2}$$

A differenciálegyenlet megoldása a (4.34) homogén és a (4.35) partikuláris megoldás összege:

$$x = x_h + x_p = Ke^{-\beta t} \sin(\gamma t + \varepsilon) + Bt + C \quad (4.37)$$

Az ismeretlen K és ε paraméterek a kezdeti feltételekből határozhatók meg. Például ha ismert a kezdeti ($t=0$) időpontban x_0 és \dot{x}_0 , akkor az ismeretlenek a

$$x_0 = K \sin \varepsilon + C$$

$$v_0 = -\beta K \sin \varepsilon + K\gamma \cos \varepsilon + B \quad (4.38)$$

egyenletekből határozhatók meg.

Láthatóan már egy másodrendű differenciálegyenlet analitikus megoldása is komoly munkaráfordítást igényel, ezért a gyakorlatban magasabb rendű differenciálegyenleteket numerikus módszerekkel szokás megoldani.

4.1. Példa. Vizsgáljuk a

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = b_0 t$$

erőgerjesztésű lengőrendszer rezgéseit $m=2$ kg, $k=60$ Ns/m, $c=2 \cdot 10^4$ N/m, $b_0=100$ N/s adatokkal, $x(0)=0$ és $\dot{x}(0) = 0$ kezdeti feltételekkel!

Megoldás.

Az adatok behelyettesítésével a megoldandó differenciálegyenlet

$$2 \frac{d^2x}{dt^2} + 60 \frac{dx}{dt} + 2 \cdot 10^4 x = 1000t$$

Követve a levezetés eredményeit, a csillapítatlan sajátfrekvencia (fiktív segédérték, nem látjuk sehol) a következő:

$$\alpha = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^4}{2}} = 100 \text{ 1/s}$$

A Lehr-féle csillapítás:

$$D = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} = \frac{60}{2\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 10^4}} = 0,15$$

A rezgések csillapodására jellemző exponenciális kitevő:

$$\beta = \alpha D = 0,15 \cdot 100 = 15 \text{ 1/s}$$

A csillapított (tényleges) szabadrezgés körfrekvenciája:

$$\gamma = \alpha \sqrt{1 - D^2} = 100 \sqrt{1 - 0,15^2} = 98,87 \text{ 1/s}$$

A partikuláris megoldás együtthatói:

$$B = \frac{b_0}{c} = \frac{1000}{2 \cdot 10^4} = 5 \cdot 10^{-2}$$

$$C = -\frac{kb_0}{c^2} = -\frac{60 \cdot 1000}{4 \cdot 10^8} = -1,5 \cdot 10^{-4}$$

A kezdeti feltételek figyelembevételével a következő egyenletek adódnak:

$$x_0 = K \sin \varepsilon + C$$

$$0 = K \sin \varepsilon - 1,5 \cdot 10^{-4}$$

$$v_0 = -\beta K \sin \varepsilon + K\gamma \cos \varepsilon + B \quad 0 = -15K \sin \varepsilon + K98,87 \cos \varepsilon + 5 \cdot 10^{-2}$$

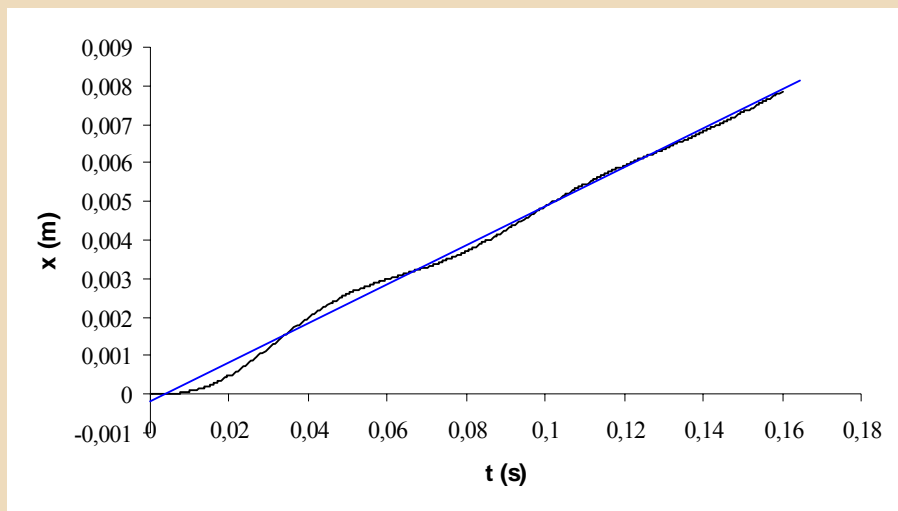
Az egyenletrendszerből a tranziens rész paramétereit meghatározhatók:

$K=0,000505$ m és $\varepsilon=2,85$ rad.

A tömeg elmozdulásának egyenlete:

$$x = 0,000505e^{-15t} \sin(98,87t + 2,85) + 0,05t - 0,00015$$

A megoldásgörbe a 4.3. ábrán látható. A görbe vízszintes érintővel indul, mivel a kezdő sebesség zérus. A tranziens elhalása után a görbe az állandósult megoldásba simul.



4.3. ábra

4.2. Megoldás a frekvenciatartományban

A rendszereket sok esetben időben *szinuszosan változó jellel gerjesztjük* és megelégszünk a rendszer *állandósult válaszána*k ismeretével, mivel a bekapcsolási (tranziens) jelenségek gyorsan lejátszódnak, és tartósan a rendszer állandósult válasza érvényesül.

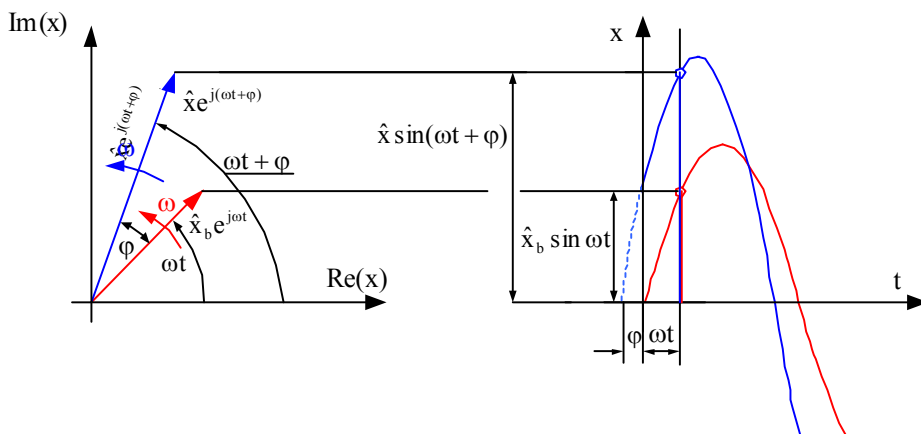
Szinuszos bemenet esetén létezik egy nagyon egyszerű megoldás a rendszer állandósult válaszána meghatározására.

4.2.1. Frekvenciafüggvény

Tételezzük fel, hogy a bemenőjel

$$x_b = \hat{x}_b \sin \omega t = \hat{x}_b \operatorname{Im}(e^{j\omega t}) \quad (4.39)$$

alakú kezdőfázis nélküli szinuszos jel, melynek \hat{x}_b az amplitúdója, ω pedig a körfrekvenciája. A továbbiakban a komplex írásmódot részesítjük előnyben egyszerűsége miatt.



4.4. ábra

Szinuszos bemenetű lineáris rendszerek rendszeregyenletének *állandósult megoldása* szintén ω körfrekvenciájú szinuszos jel, mely φ -fázisszöggel van eltolódva a bemenőjelhez képest.

Az állandósult megoldást ezért a következő alakban keressük:

$$x = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi) = \hat{x} \operatorname{Im}(e^{j\varphi} e^{j\omega t}) \quad (4.40)$$

A továbbiakban az $\operatorname{Im}(\cdot)$ szimbólumot elhagyjuk, és megállapodás szerint a komplex számokkal megadott jelek képzetes részét tekintjük megoldásnak.

A gerjesztést és a megoldást a komplex számsíkon két különböző hosszúságú, de azonos ω szögsebességgel forgó vektor jelképezi (4.4. ábra). A két vektor között φ fáziseltérés van. *A megoldás bármely időpontban a vektorok függőleges vetülete* (a komplex szám imaginárius része). A könnyebb érthetőség kedvéért időtartományban is ábráztuk a bemenő és kimenő jelet.

A megoldandó másodrendű differenciálegyenlet legyen

$$a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_1 \frac{dx_b}{dt} + b_0 x_b \quad (4.41)$$

Képezzük a bemenőjel deriváltját,

$$\begin{aligned} x_b &= \hat{x}_b e^{j\omega t} \\ \dot{x}_b &= \hat{x}_b (j\omega) e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (4.42)$$

majd a kimenőjel deriváltjait:

$$\begin{aligned} x &= \hat{x} e^{j\varphi} e^{j\omega t} \\ \dot{x} &= \hat{x} e^{j\varphi} (j\omega) e^{j\omega t} \\ \ddot{x} &= \hat{x} e^{j\varphi} (j\omega)^2 e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Behelyettesítjük a deriváltakat a differenciálegyenletbe, kiemelve a közös tényezőt:

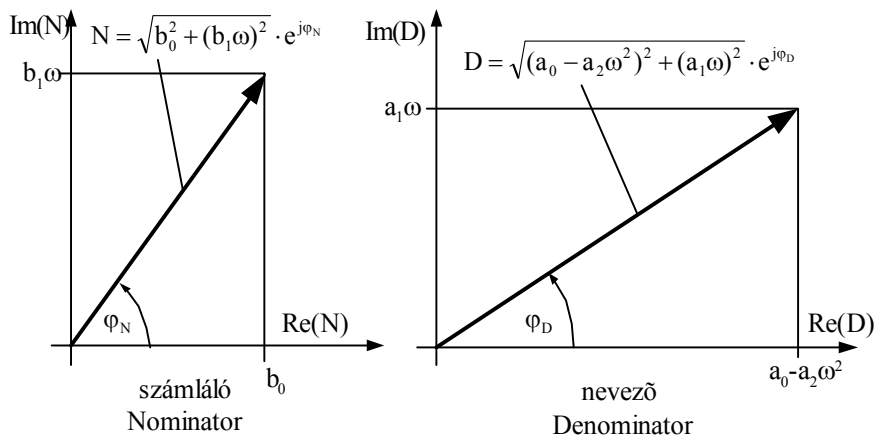
$$\hat{x} e^{j\varphi} e^{j\omega t} [a_2 (j\omega)^2 + a_1 (j\omega) + a_0] = \hat{x}_b e^{j\omega t} [b_1 (j\omega) + b_0] \quad (4.44)$$

A rendszer kimenete és bemenete közötti viszonyt a (4.44) egyenletből kifejezett $Y(j\omega)$ komplex törtfüggvény az ún. **frekvenciafüggvény** jellemzi, mely számlálója $N(j\omega)$, nevezője $D(j\omega)$ (4.5. ábra):

$$Y(j\omega) = \frac{x(j\omega)}{x_b(j\omega)} = \frac{\hat{x}e^{j\varphi}e^{j\omega t}}{\hat{x}_b e^{j\omega t}} = \frac{b_1(j\omega) + b_0}{a_2(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_0} = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \quad (4.45)$$

Az amplitúdó nagyítás és a fáziseltérés számszerű meghatározása érdekében átalakítjuk a frekvenciafüggvényt:

$$Y(j\omega) = \frac{\overbrace{b_0}^{\text{valós}} + j \cdot \overbrace{b_1\omega}^{\text{képzetes}}}{\underbrace{(a_0 - a_2\omega^2)}_{\text{valós}} + j \cdot \underbrace{a_1\omega}_{\text{képzetes}}} = \frac{\sqrt{b_0^2 + (b_1\omega)^2}}{\underbrace{\sqrt{(a_0 - a_2\omega^2)^2 + (a_1\omega)^2}}_A} \cdot \frac{e^{j\varphi_N}}{e^{j\varphi_D}} \quad (4.46)$$



4.5. ábra

1) A törtfüggvény abszolút értéke az amplitúdó nagyítási függvény:

$$A(\omega) = |Y(j\omega)| = \frac{\hat{x}}{\hat{x}_b} \quad (4.47)$$

Az $A(\omega)$ amplitúdó-nagyítási függvény a frekvencia függvényében megadja, hogy a kimenő szinuszos jel amplitúdója hányszorosa a bemenő szinuszos jel amplitúdójának. Az amplitúdó nagyítási függvény a frekvenciafüggvény abszolút értéke.

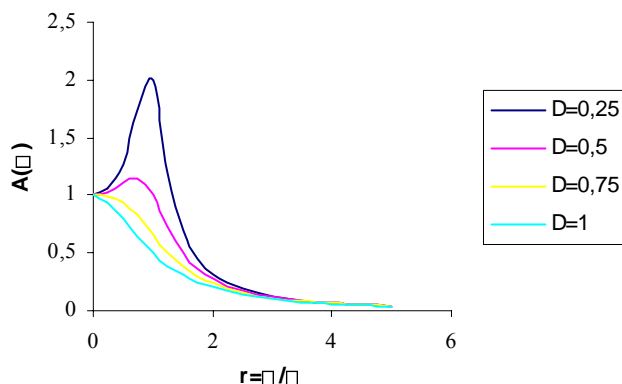
2) A törtfüggvény komplex része, $e^{j\varphi}$ pedig a kimenő és a bemenő szinuszjel fáziskülönbsége.

A kimenőjel $\varphi(\omega) = \varphi_N - \varphi_D$ fázisszöggel előzi meg a bemenő jelet.

A frekvenciafüggvény egy másik szokásos megadása a számláló és nevező abszolút értéke mellett feltünteteti azok fázisszögét is:

$$Y(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{|N(j\omega)| \angle \varphi_N}{|D(j\omega)| \angle \varphi_D} = A(\omega) \angle \varphi \quad (4.48)$$

Az amplitúdó nagyítási függvényt (melyet rezonanciagörbének is szoktak nevezni), megadhatjuk lineáris frekvencia léptékben, mint az a 4.6. ábrán látható.



4.6. ábra

Szokásosabb azonban a frekvenciafüggvényt két részben, logaritmikus léptékben ábrázolni (BODE diagram). Az első BODE diagram $A(\omega)$ [dB]- $\log(\omega)$, míg a második BODE diagram φ - $\log(\omega)$. Lásd (5.5) példa.

4.2. Példa

Oldjuk meg a 4.1. Példát $x_b = 100 \sin(200t)$ [N] szinuszos gerjesztéssel!

Értelemszerűen (4.41)-ben $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $\hat{x}_b = 100$ N, $\omega_b = 200$ 1/s.

A frekvenciafüggvény $\omega = \omega_b$ gerjesztő körfrekvencián:

$$Y(j\omega_b) = \frac{N(j\omega_b)}{D(j\omega_b)} = \frac{1}{(a_0 - a_2\omega_b^2) + a_1j\omega_b} = \frac{1}{(2 \cdot 10^4 - 2 \cdot 200^2) + 60 \cdot 200j}$$

A számláló abszolút értéke $|N(j\omega)| = 1$, fázisszöge $\varphi_N = 0$. A nevező abszolút értéke

$$|D(j\omega_b)| = \sqrt{(2 \cdot 10^4 - 2 \cdot 200^2)^2 + (60 \cdot 200)^2} = 61888$$

és fázisszöge

$$\varphi_D = \arctg \frac{a_0 - a_2\omega^2}{a_1\omega} = \arctg \frac{2 \cdot 10^4 - 2 \cdot 200^2}{60 \cdot 200} \rightarrow \varphi_D = -1,37 \text{ rad}.$$

Az amplitúdó-nagyítási függvény a gerjesztés körfrekvenciáján:

$$A(\omega_b) = |Y(j\omega_b)| = \frac{1}{61888} = 0,00001615.$$

A kimenet fázisszöge:

$$\varphi = \varphi_N - \varphi_D = 0 - (-1,37) = 1,37 \text{ rad}.$$

A kimenet ezzel:

$$x = \underbrace{[A(\omega_b)\hat{x}_b]}_{\hat{x}} \sin(\omega_b t + \varphi) = 0,001615 \sin(200t + 1,37)$$

A tömeg állandósult mozgásának amplitúdója 0,001615 m, és a kimenet 1,37 radiánnal előzi meg a gerjesztést.

4.2.2. Periodikus, de nem szinuszos bemenet. Fourier-sor

A szinuszos gerjesztésre adott állandósult válasz kérdését az előző fejezetben tárgyaltuk. A rendszerek másik nagyon gyakori gerjesztési formája ugyan nem szinuszos, de legalább periodikus. Gondoljunk egy bütyökkel vezérelt szelepre, vagy egy négyszögjellel meghajtott villamos motorra. A következő részben megmutatjuk, hogy a periodikus bemenetet hogyan vezethetjük vissza harmonikus (szinuszos és koszinuszos) bemenetek összegére.

Eddigi tanulmányaink során már megismerkedtünk a függvények egy adott pont környezetében való Taylor-sorba fejtésével a munkaponti linearizáció során. Egy másik, ún. Fourier- sorfejtési eljárás szerint a periodikus függvények előállíthatók szinuszos és koszinuszos függvények végtelen összegeként. Ez a felismerés lehetővé teszi a periodikus bemenetre adott állandósult válasz meghatározását. Miután a gerjesztő jelet Fourier-sorfejtéssel szinuszos tagok összegére bontjuk (a koszinusz is eltolt szinusz), az egyes szinuszos bemenetekre adott választ az előző fejezet szerint külön-külön meghatározzuk. Mivel lineáris rendszerekre érvényes a szuperpozíció elve, ezért az egyes válaszokat összeadva előállíthatjuk a kimenetet.

A szigorú matematikai bizonyítást mellőzve csak a Fourier-sorfejtés végeredményét közöljük.

A periodikus függvények Fourier-sora a következő:

$$f(t) \cong a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) \quad (4.49)$$

Az összefüggésben T a függvény periódusideje, $\omega_0 = 2\pi/T$ az alapharmonikus körfrekvenciája, k pedig a felharmonikusok rendszáma. A függvény a_0 középvértékét (villamos jeleknél „egyenáramú összetevőjét”)

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad (4.50)$$

az alap- és felharmonikusok (magasabb rendszámú összetevők) amplitúdóit pedig a

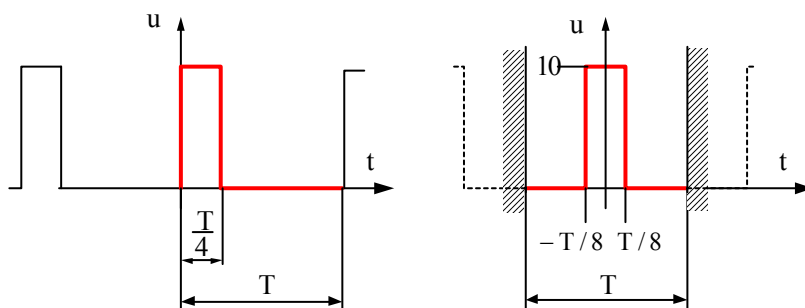
$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k \frac{2\pi}{T} t) dt \quad (4.51)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k \frac{2\pi}{T} t) dt \quad (4.52)$$

összefüggésekkel számítjuk.

Páratlan függvények csak szinuszos, páros függvények csak koszinuszos tagokból állnak.

A Fourier-sorfejtési eljárást egy $f=1$ kHz frekvenciájú, $\epsilon=0,25$ kitöltési tényezőjű, $\hat{u}=10$ V csúcsertékű négyszögjelen mutatjuk be (4.7. ábra).



4.7. ábra

A kitöltési tényező a négyszögjel magas szinthez tartozó idejének viszonyítja a periódusidőhöz:

$$\epsilon = \frac{T/4}{T} = 0,25 \quad (4.53)$$

A jel periódusideje:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1000} = 0,001 \text{ s}$$

alapharmonikusának körfrekvenciája

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 6282 \text{ 1/s}$$

A további számítások egyszerűsítése végett a jelet úgy vesszük fel a koordináta-rendszerben, hogy az a függőleges tengelyre szimmetrikus (páros függvény) legyen. A jel középértéke:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/8}^{T/8} 10 \cdot dt = \frac{1}{T} 10 \cdot [t]_{-T/8}^{T/8} = 2,5$$

Mivel a jel páros, ezért Fourier-sora csupán koszinuszos tagokból áll. A k-dik együttható

$$a_k = \frac{2}{T} \int f(t) \cos(k \frac{2\pi}{T} t) dt =$$

$$= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T\varepsilon}{2}}^{\frac{T\varepsilon}{2}} 10 \cos(k \frac{2\pi}{T} t) dt = \frac{20}{T} \left(\frac{T}{2\pi k} \right) \left[\sin(k \frac{2\pi}{T} t) \right]_{-\frac{T\varepsilon}{2}}^{\frac{T\varepsilon}{2}} = \frac{20}{k\pi} \sin(k\pi\varepsilon)$$

Amennyiben a szinusz függvény ($k\pi\varepsilon$) argumentuma $n\pi$ ($n=0, 1, 2, \dots$) értéket vesz fel, az együttható zérus lesz. Valóban, esetünkben $\varepsilon=0,25$ értéknél az a_k

$$k = \frac{1}{\varepsilon\pi} n\pi = 4, 8, 12, \dots$$

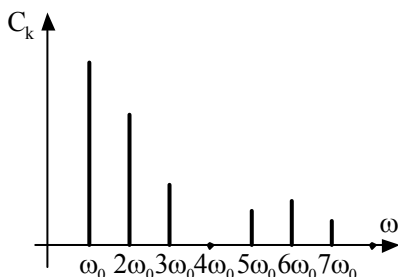
együttható zérusra adódik.

Az a_k együtthatókat az alábbi táblázatban foglaltuk össze.

k	a_k
1	4,5038
2	3,1847
3	1,5012
4	0
5	-0,9007
6	-1,0615
7	-0,6434
8	0
...	...

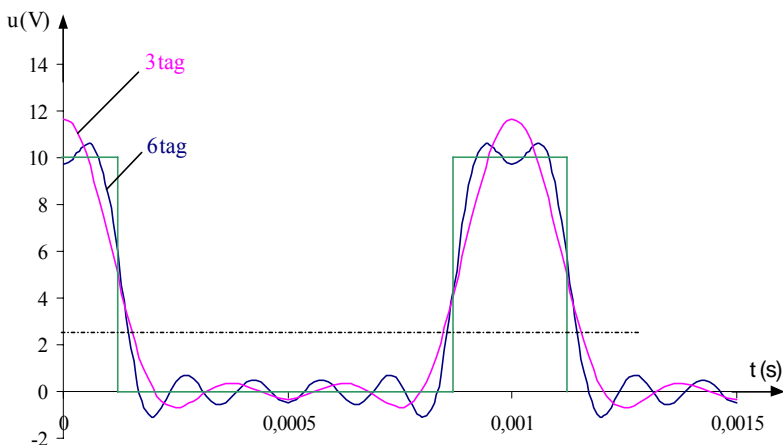
Szokásos az egyes harmonikus frekvencia-összetevők $C_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ amplitúdóit diagramban ábrázolni. A vizsgált jel csak koszinuszos tagokból áll, így $C_k = |a_k|$ (4.8. ábra). Az ábra alapján a következő fontos következtetést vonhatjuk le:

Periodikus jelek frekvencia spektruma diszkrét vonalakból áll.



4.8. ábra

A közelítés jósága erősen függ attól, hogy a jel hány frekvencia-összetevőjét vesszük figyelembe. A 4.9. ábrán feltüntettük a bemenőjel 3 és 6 tagú Fourier-sorral való közelítését. A hat tagú közelítés jellegre már jól követi a bemenő jel (zöld ábra) alakját. Éles változásoknál azonban nincs értelme a tagok számának túlzott növelésének, mert a Gibbs-féle jelenség miatt a túllövések nem kerülhetők el.



4.9. ábra.

A következő példában a periodikus bemenetre adott állandósult válasz meghatározását mutatjuk be.

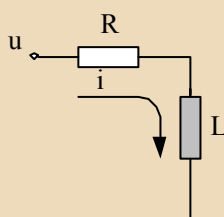
4.3. Példa

Legyen a vizsgált rendszer egy elektromágnes, mely behúzó erejét nem a kapocsfeszültség változtatásával, hanem az állandó csúcsértékű kapocsfeszültség kitöltési tényezőjének 1 kHz frekvenciával történő változtatásával idézünk elő. A 4.10. ábrán látható elektromágnes ellenállása $R=10\ \Omega$, induktivitása $L=0,05\text{H}$.

Határozzuk meg a mágnes áramának időbeli változását $\epsilon=0,25$ kitöltési tényezőjű $u_{\max}=10\ \text{V}$ kapocsfeszültség esetén.

Megoldás

Az elektromágnes helyettesítő kapcsolása a következő:



410. ábra

A körben folyó áram meghatározása érdekében a rendszeregyenletet a huroktörvénnyel alkalmazásával írjuk fel:

$$u - iR - L \frac{di}{dt} = 0$$

Színuszos bemenetet és kimenetet feltételezve, a részletszámítások mellőzésével a frekvenciafüggvény a következő:

$$Y(j\omega) = \frac{I(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{1}{R + j\omega L}$$

A frekvenciafüggvényből az amplitúdó-nagyítási függvényt az

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

összefüggéssel, a fázisszöget pedig a

$$\varphi = 0 - \arctg \frac{\omega L}{R}$$

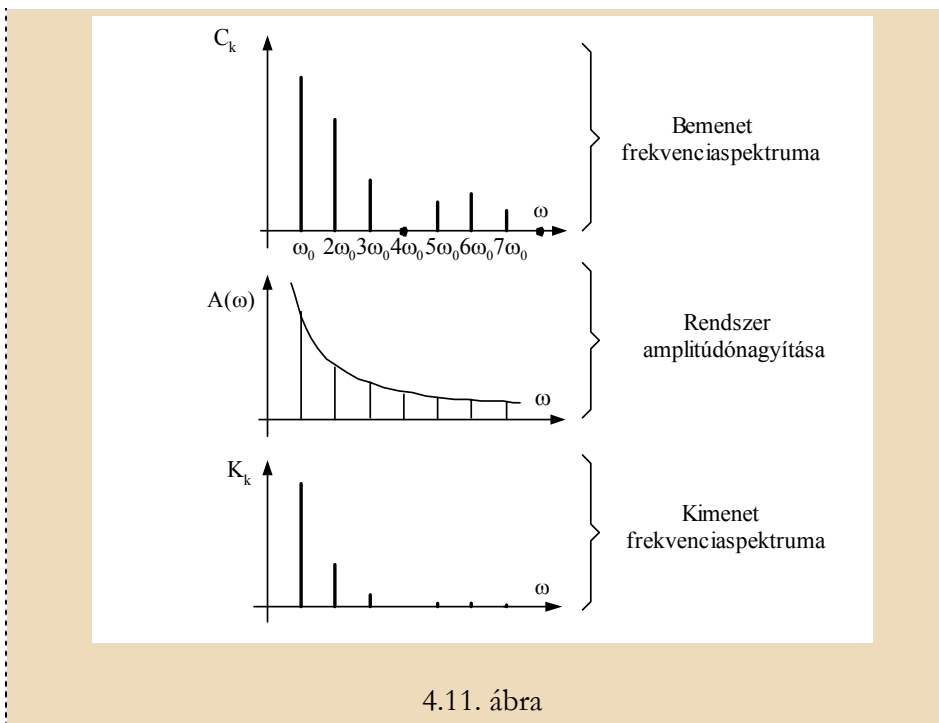
összefüggéssel kapjuk.

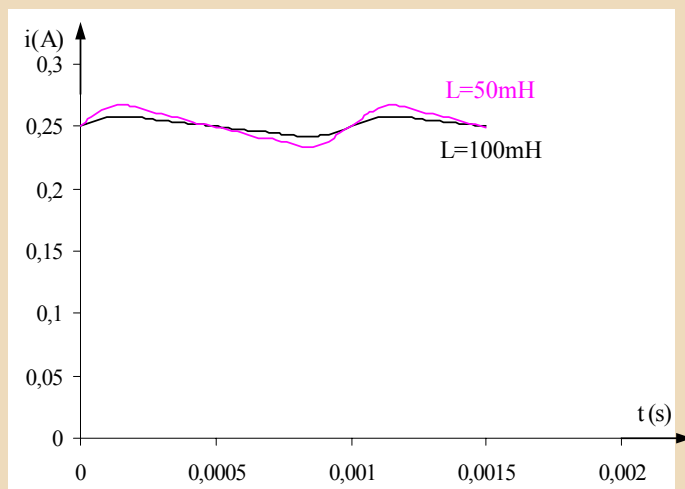
A válaszjel meghatározásához felhasználjuk a kapocsfeszültség Fourier-sorának előző példában meghatározott a_0 statikus és a_k koszinuszos tagjainak együtthatóit, valamint az egyes alap és felharmonikus frekvenciákon külön-külön meghatározzuk az $A(k \omega_0)$ amplitúdó nagyítási függvény értékeit. A válasz statikus részét értelemszerűen az amplitúdó-nagyítási függvényben $\omega=0$ helyettesítéssel kapjuk. A kimenőjel frekvenciaösszetevőinek értékeit $K_k = A(k \omega_0) B_k$ szerint kiszámítva a válaszokat összegezzük. A megoldás tehát

$$i(t) = \underbrace{A_0 \frac{1}{R}}_{\text{statikus}} + \underbrace{A(6282) \cdot B_1 \sin(6282t + \varphi_1)}_{\text{alapharmonikus}} + \underbrace{A(2 * 6282) \cdot B_2 \sin(2 * 6282t + \varphi_2)}_{\text{1. felharmonikus}} + \dots$$

Az alap- és felharmonikus frekvenciákon lévő bemenőjel, amplitúdó nagyítás, kimenőjel amplitúdó és fázisszög összetevők értékeit táblázatosan, valamint a 4.11. ábrán közöljük. A kimenőjelet a 4.12. ábrán láthatjuk az eredeti 50 mH és duplájára növelt induktivitás esetén. Az áram középértéke a célul tűzött $A_0/R=0,25$ A. A mágnes induktivitásának növelésével elérhető, hogy az áram kevésbé ingadozzon a középértéke körül.

I	$\omega_k = k \omega_0$ (1/s)	Fourier-együtthatók		$A(\omega_k)$ (1/Ω)	$\varphi(\omega_k)$ (rad)
		b_k	a_k		
0	0	-	2,5	1/R	0
1	6282	-	4,5038	0,00318	-1,538
2	2*6282	-	3,1847	0,00150	-1,554
3	3*6282	-	1,5012	0,00106	-1,560
4	4*6282	-	0	0,00079	-1,562
5	5*6282	-	-0,9007	0,00063	-1,564
6	6*6282	-	-1,0615	0,00053	-1,565





4.12. ábra.

A periodikus függvények Fourier-sora komplex alakban egyszerűbben írható fel, ha negatív harmonikusokra is kiterjesztjük a sort:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \quad (4.54)$$

ahol az egyes frekvencia-összetevők amplitúdói (az amplitúdó spektrum) az

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (4.55)$$

összefüggéssel számíthatók.

4.2.3. Aperiodikus bemenet. Fourier-transzformált

Sajnos a gyakorlatban előforduló jelek jelentős része nem periodikus (például az impulzus-függvény), ezért ezekre a frekvenciamódszer közvetlenül nem alkalmazható. Ha nem akarunk lemondani a frekvencia-módszer előnyeiről, akkor a nemperiodikus jeleket legalább formálisan periodikussá

kell tennünk. Végezzünk egy gondolat kísérletet: tekintsük a nemperiodikus jelet végtelen periódus idejűnek!

Mivel a periodikus jelek diszkrét spektrumvonalai $\omega_0 = 2\pi/T$ távolságra helyezkednek el, a $T \rightarrow \infty$ határátmenetkor a közöttük lévő távolság végtelen kicsire csökken.

Úgy is mondhatjuk, hogy a *nemperiodikus jelek amplitúdó-spektruma folytonos*, melynek csak egy ω helyen felvett $d\omega$ sávra vonatkozó átlagos értéke adható meg.

A nemperiodikus függvények esetében a Fourier-sor átmegy Fourier-integrálba:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.56)$$

ahol az amplitúdó-spektrum is módosul:

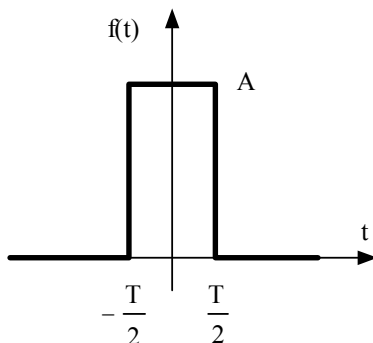
$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \rightarrow F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.57)$$

Meg kell jegyeznünk, hogy a nemperiodikus jelek integrálása a végtelen integrálási határok következtében csak akkor végezhető el, ha az $f(t)$ függvény abszolút integrálható, vagyis az integrál korlátos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < K \quad (4.58)$$

Például a véges T hosszúságú, A amplitúdójú impulzus (4.13. ábra) abszolút integrálható, ezért értelmezhetjük a Fourier-transzformáltját. A véges impulzus a következő módon adható meg:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < -\frac{T}{2} \\ A, & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0, & t > \frac{T}{2} \end{cases} \quad (4.59)$$



4.13. ábra

Az impulzus Fourier-integráljának (Fourier-transzformáltjának) számításakor elégséges az integrálást csak ott elvégezni, ahol a függvény értéke zérustól különbözik ($-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$):

$$F(j\omega) = F(x(t)) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \cdot e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{A}{-j\omega} e^{-j\omega t} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} =$$

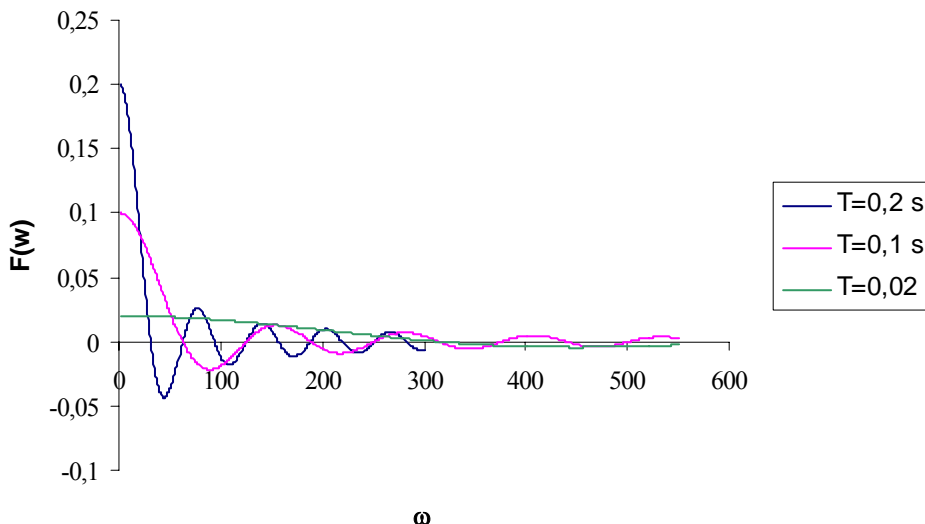
$$= -\frac{A}{j\omega} \left[\cos \omega \frac{T}{2} - j \sin \omega \frac{T}{2} - (\cos \omega \frac{T}{2} + j \sin \omega \frac{T}{2}) \right] = \frac{2A \sin \omega \frac{T}{2}}{\omega} \quad (4.60)$$

Az impulzus T szélességétől függően a Fourier-transzformált alakja a 4.14. ábra szerint alakul.

Megfigyelhetjük, hogy az amplitúdó-spektrum

- folytonos

- az impulzus szélességének csökkenésével egyre kevésbé változik.



4.14. ábra

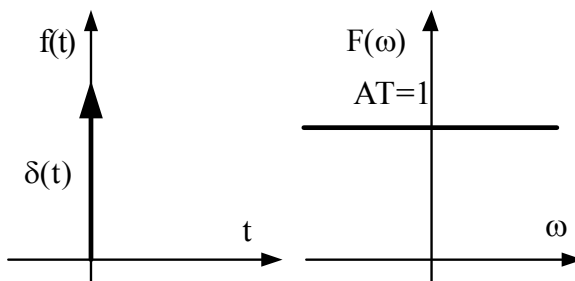
A gyakorlati alkalmazásokban kitüntetett jelentősége van a végtelen rövid szélességű impulzusnak (Dirac-delta). A következőkben a Dirac-delta amplitúdó-spektrumát határozzuk meg.

Az amplitúdó-spektrum meghatározásához induljunk ki a véges szélességű impulzus Fourier-transzformáltjának (6.60) összefüggéséből. Átalakítás és határátmenet képzés után a következőt kapjuk:

$$F(j\omega) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{2A \sin \omega \frac{T}{2}}{\omega} = 2A \frac{T}{2} \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\sin \omega \frac{T}{2}}{\omega \frac{T}{2}} = AT \quad (4.61)$$

Mivel a Dirac-delta impulzus területe egységnyi, ezért $AT=1$. A kapott eredmény nagyon fontos (4.15. ábra):

A végtelen rövid impulzus (Dirac-delta) Fourier-spektruma állandó.



4.15. ábra

A végtelen rövid idejű impulzus (Dirac-delta) tartalmazza az összes lehetséges körfrekvenciájú, azonos amplitúdójú szinuszos jelösszetevőt.

A nemperiodikus jelek frekvenciafüggvényét a periodikus jelek frekvenciafüggvényéhez hasonlóan értelmezhetjük:

$$Y(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{F_b(j\omega)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt}{\int_{-\infty}^{\infty} f_b(t)e^{-j\omega t} dt} \quad (4.62)$$

Amennyiben a rendszert nagyon rövid, Dirac - deltát jól közelítő egységimpulzussal gerjesztjük - melynek Fourier - integrálja (transzformáltja) egységnyi- a (4.62) egyenlet nevezője 1 lesz. Ebből következik, hogy

a rendszer frekvenciafüggvénye impulzusgerjesztés esetén megegyezik a válaszjel Fourier-integráljával.

4.4. Példa

Ismerjük egy rendszer $x_b(t)=2 \cdot \delta(t)$ gerjesztésre adott válaszát, melyet a regresszrátumon végzett regressziószámítással

$$x(t) = 1,25e^{-6t} \sin 8t$$

függvénnyel adhatunk meg. Határozzuk meg a rendszer

- a) frekvencia-átviteli függvényét
- b) amplitúdó-nagyítási függvényét (BODE 1 diagram)!

Megoldás

ad a)

A gerjesztés Fourier-transzformáltja:

$$F_b(j\omega) = F(x_b(t)) = \int_{0^-}^{0^+} 2\delta(t) \underbrace{e^{-j\omega t}}_1 dt = 2$$

A kimenőjel Fourier-transzformáltjának kiszámításához felhasználjuk az ismert

$$\sin \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$$

összefüggést. A kimenőjel F-transzformáltja meghatározható, mert az f(t) függvény abszolút integrálható:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_0^\infty 1,25 \cdot e^{-6t} \sin 8t \cdot e^{-j\omega t} dt = 1,25 \int_0^\infty \frac{e^{j8t} - e^{-j8t}}{2j} e^{-6t} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{0,625}{j} \int_0^\infty (e^{-t(j\omega+6-8j)} - e^{-t(j\omega+6+8j)}) dt = \frac{0,625}{j} \left[\frac{e^{-t(j\omega+6-8j)}}{-j(\omega-8)-6} - \frac{e^{-t(j\omega+6+8j)}}{-j(\omega+8)-6} \right]_0^\infty = \\ &= \frac{0,625}{-j} \left[\frac{e^{-6t} \cdot e^{-jt(j-8)}}{j(\omega-8)+6} - \frac{e^{-6t} \cdot e^{-jt(\omega+8)}}{j(\omega+8)+6} \right]_0^\infty = \\ &= \frac{0,625}{-j} \left(-\frac{1}{j(\omega-8)+6} + \frac{1}{j(\omega+8)+6} \right) = \\ &= \frac{0,625}{-j} \left(\frac{-16j}{100 - \omega^2 + 12j\omega} \right) = \frac{10}{100 - \omega^2 + 12j\omega} \end{aligned}$$

Erre az eredményre a Laplace-transzformált tárgyalásakor még visszatérünk.

A rendszer frekvencia-átviteli függvénye:

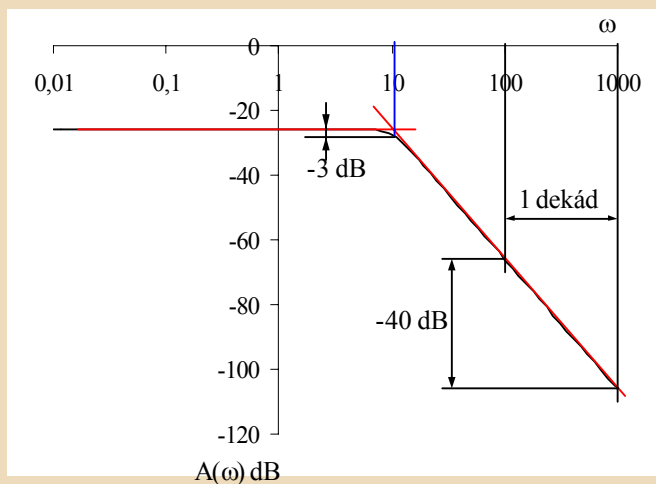
$$Y(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{F_b(j\omega)} = \frac{10}{2} \frac{100 - \omega^2 + 12j\omega}{100 - \omega^2 + 12j\omega} = \frac{5}{100 - \omega^2 + 12j\omega}$$

ad b)

Az amplitúdó-nagyítási függvény a frekvencia-átviteli függvény abszolút

értéke: $A(\omega) = |Y(j\omega)| = \frac{5}{\sqrt{(100 - \omega^2)^2 + (12\omega)^2}}$

A BODE diagramba berajzoltuk a görbe aszimptotáit (végtelenbeli érintőit), melyek meredeksége $\omega \ll 10$ 1/s esetén 0 dB/dek és $\omega \gg 10$ 1/s esetén -40 dB/dek. Ugyancsak feltüntettük a rezonancia-frekvencia helyét, ahol a nagyítási függvénynek maximuma van (aszimptoták metszéspontja, $\omega_0 = 10$ 1/s).



4.3. Megoldás az operátor tartományban. Laplace transzformáció

A Fourier-transzformációval a nemperiodikus függvények közül az abszolút integrálhatókat sikerült periodikussá tenni. Sajnos számos fontos jelre – mint például az ugrásfüggvény – nem áll fenn az abszolút integrálhatóság. Ezért ha a nem abszolút integrálható függvényt megszorozzuk egy nála gyorsabban zérushoz tartó $e^{-\sigma t}$ negatív kitevős exponenciális függvénnyel, akkor azt általában abszolút integrálhatóvá tehetjük.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [f(t)e^{-\sigma t}] = 0 \rightarrow \int_0^{\infty} |f(t)e^{-\sigma t}| dt < K \quad (4.63)$$

Ha az exponenciális függvénnyel szorzott függvényen hajtjuk végre a Fourier-transzformációt, akkor a Laplace-transzformációhoz jutunk:

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (4.64)$$

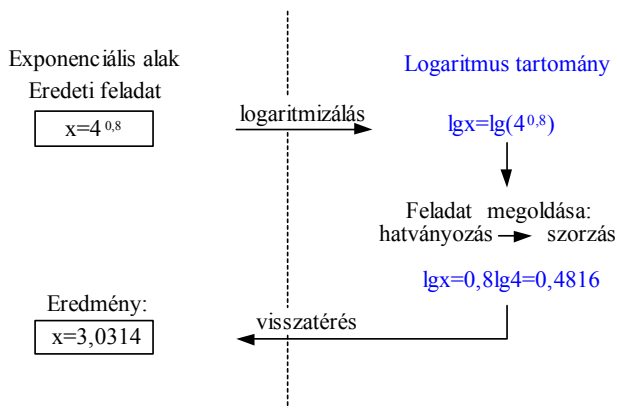
Az $f(t)$ időfüggvény Laplace-transzformáltját a következő módon definiáljuk:

$$L [f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s) \quad (4.65)$$

Itt az $s = \sigma + j\omega$ operátor a komplex körfrekvencia (mértékegysége $1/s$), $F(s)$ pedig az $f(t)$ időfüggvény Laplace-transzformáltja. A Laplace-transzformáltat nagybetűvel jelöljük, például $f(t)$ Laplace-transzformáltja formálisan $F(s)$, $g(t)$ Laplace-transzformáltja $G(s)$ stb.

Hogy rávilágítsunk a transzformáció jelentőségére, egy középiskolában tanult analógiát idézünk fel. Amikor az a feladat merült fel, hogy számítsuk ki négy 0,8-dik hatványát számológép használata nélkül, akkor a fel-

adatot a logaritmus fogalmának felhasználásával oldhattuk meg. Először a kifejezést logaritmizáltuk (áttértünk a logaritmus tartományba), ott egyszerű algebrai művelettel (szorzással) elvégeztük a hatványozást, majd visszatértünk az eredeti feladathoz. Szemléletesen ábrázolva:



A műszaki problémák jelentős hányada n-ed rendű, állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlettel írható le. Az ilyen típusú differenciálegyenletek időtartománybeli megoldásával az előző fejezetben foglalkoztunk. Létezik azonban egyszerűbb eljárás is, ha egy „kerülő utat” alkalmazunk. Ehhez az adott $f(t)$ időfüggvényt transzformálnunk kell (hasonlóan a logaritmizáláshoz) az ún. „operátor tartományba”, ott egyszerű algebrai műveletekkel megoldani a differenciálegyenletet, majd végül visszatérni az időtartományba.

A Laplace-transzformáció előnye, hogy a differenciálegyenletek megoldása egyszerű algebrai egyenletek megoldására vezethető vissza. Az analitikus megoldás lehetővé teszi határértékek, stabilitási kérdések egzakt vizsgálatát is.

Az operátor tartományban megoldott egyenletet természetesen vissza kell transzformálnunk az idő tartományba. A gyakorlatban az oda- és a visszatranszformáláshoz nem a definíció szerinti bonyolult összefüggéseket használjuk, hanem a gyakran használt elemi függvényeket és azok Laplace-transzformáltjait táblázatból (némi gyakorlat után emlékezetünkől) vesszük. Ha az operátor tartományban elvégzett műveletek eredményeként túl bonyolult törtkifejezést kapunk, akkor azt először felbontjuk egy-

szerű összefüggésekre (parciális törtekre), melyeket táblázat segítségével már visszatranszformálhatunk az időtartományba.

A Laplace-transzformáció alkalmazásának legfőbb korlátja, hogy csak lineáris rendszerekre alkalmazható.

Korábban nagy erőfeszítéseket tettek a nemlineáris rendszerek linearizálására annak érdekében, hogy a differenciálegyenleteket meg tudják oldani. A számítástechnika rohamos fejlődése azonban egyre inkább előtérbe helyezte az időtartománybeli szimulációs módszereket, melyek nehézség nélkül alkalmazhatók nemlineáris rendszerekre is. Hátrányuk azonban, hogy elméleti vizsgálatokra kevésbé alkalmasak.

4.3.1. Transzformációs szabályok

Néhány egyszerű függvény Laplace-transzformáltjának számítását az alábbiakban mutatjuk be.

$$1) f(t) = 1(t)$$

Mivel az $1(t)$ ugrásfüggvény értéke $t < 0$ esetén zérus, ezért elégséges az integrálást 0 és végtelen között elvégezni. (Az improprius integrált formálisan jelöljük a továbbiakban)

$$F(s) = \mathcal{L} [1(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} 1(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \underline{\underline{\frac{1}{s}}}$$

$$2) f(t) = \delta(t)$$

Mivel $\delta(t)$ csak 0^- és 0^+ között vesz fel zérustól különböző értéket, ezért az integrálást is elégséges ebben a tartományban elvégezni. Itt pedig $e^{-s \cdot 0} = 1$ értékű, ezért

$$F(s) = \mathcal{L} [\delta(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \underbrace{e^{-st}}_1 \delta(t) dt = 1$$

$$3) f(t) = e^{-at}$$

A hatványozás azonosságait alkalmazva kapjuk:

$$F(s) = \mathcal{L} [e^{-at}] = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \left[-\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \right]_0^{\infty} = \underline{\underline{\frac{1}{s+a}}}$$

$$4) f(t) = \sin(\omega t)$$

A komplex számokkal egyszerűbben végezhető el a transzformáció, ha a $\sin(\omega t) = \text{Im}(e^{j\omega t})$ alakot használjuk.

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L} (\sin \omega t) &= \text{Im} \int_0^{\infty} e^{j\omega t} e^{-st} dt = \text{Im} \left[\frac{1}{j\omega - s} e^{(j\omega - s)t} \right]_0^{\infty} = \\ &= \text{Im} \left(-\frac{1}{j\omega - s} \right) = \text{Im} \left(-\frac{1}{j\omega - s} \cdot \frac{j\omega + s}{j\omega + s} \right) = \underline{\underline{\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}}} \end{aligned}$$

$$5) f(t) = \cos(\omega t)$$

Mivel $\cos(\omega t) = \text{Re}(e^{j\omega t})$, ezért az előző levezetésből közvetlenül adódik

$$F(s) = \mathcal{L} [\cos(\omega t)] = \underline{\underline{\frac{s}{s^2 + \omega^2}}}$$

Hasonló módon, de még bonyolultabb számításokkal a gyakrabban előforduló időfüggvények Laplace-transzformáltjai meghatározhatók, melyeket az alábbi táblázat tartalmaz.

Laplace-transzformáltak táblázata.

	$f(t)$	$L[f(t)]=F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$t \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
5	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
6	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
7	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
8	$\int_0^t f(t-T)g(T)dT$	$F(s)G(s)$
9	$1(t-T)$	$\frac{1}{s}e^{-sT}$
10	$\frac{\alpha}{\gamma} e^{-\beta t} \sin \gamma t ; (\gamma = \alpha \sqrt{1 - (\beta / \alpha)^2})$	$\frac{\alpha}{s^2 + 2\beta s + \alpha^2}$
11	$\frac{\alpha}{\gamma} e^{-\beta t} \sin(\gamma t + \varphi)$	$\frac{s + 2a}{s^2 + 2\beta s + \alpha^2}$

A Laplace-transzformáció során alkalmazott fontosabb szabályok a következők:

a) Linearitás

A Laplace-transzformáció lineáris operáció, vagyis

$$L (f(t) + g(t)) = L (f(t)) + L (g(t)) = F(s) + G(s) \quad (4.66)$$

b) Dimenzióváltás

Ügyelnünk kell a változó Laplace-transzformáltjának dimenziójára. A (4.49) szerint elvégzett transzformáció idő szerinti integrálást tartalmaz, ezért a következő fontos megállapítást tehetjük:

Egy tetszőleges változó dimenziója Laplace-transzformáció során szekundummal szorzódik.

Például egy tömegpontra ható $f(t)$ erő dimenziója $[N]$, míg az erő $F(s)$ Laplace-transzformáltjának dimenziója: $[Ns]$.

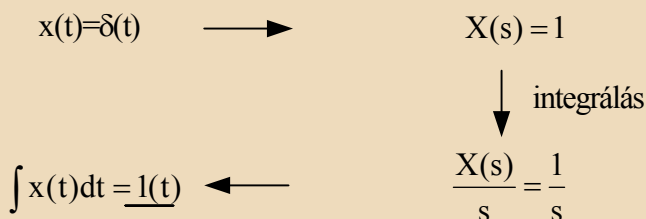
c) Integrálás:

Idő szerinti integrálásnak az operátor tartományban s -sel való osztás felel meg.

$$L \left[\int f(t)dt \right] = \frac{F(s)}{s} \tag{4.67}$$

4.5. Példa

Integráljuk a Dirac-függvényt Laplace-transzformáció segítségével!



Az eredmény az ugrásfüggvény.

d) Deriválás

Idő szerinti n-ed rendű deriválnak az operátor tartományban s^n -nel való szorzás felel meg, de ellentétben az integrálással, az időtartománybeli kezdeti feltételeket is figyelembe kell venni az operátor-tartományban! Annyi kezdeti feltételt kell ismernünk és figyelembe vennünk, ahányadik deriváltat ki akarjuk számítani. Az egyes tagokban s kitevője fokozatosan csökken zérusig, míg a kezdeti feltételeket jelentő időtartománybeli (kisbetűvel írandó) deriváltak rendűsége fokozatosan növekszik.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{df(t)}{dt} \right] &= sF(s) - f(0) \\ \mathcal{L} \left[\frac{d^2f(t)}{dt^2} \right] &= s^2F(s) - sf(0) - \frac{df(0)}{dt} \\ &\dots \end{aligned}$$

Általánosságban az n-ed rendű derivált Laplace transzformáltja:

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - s \frac{d^{n-2} f(0)}{dt^{n-2}} - \frac{d^{n-1} f(0)}{dt^{n-1}} \quad (4.68)$$

4.6. Példa. Határozzuk meg az $f(t)=1(t)$ egységugrás-függvény deriváltját!

Megoldás

$$\begin{array}{ccc} f(t)=1(t) & \longrightarrow & F(s) = \frac{1}{s} \\ & & \downarrow \text{deriválás} \\ \frac{d}{dt} 1(t) = \underline{\underline{\delta(t)}} & \longleftarrow & sF(s) - \underbrace{f(0^-)}_0 = 1 \end{array}$$

Az eredmény éppen a Dirac-delta függvény.

4.7. Példa. Határozzuk meg a harmonikus lengőmozgás $x(t)=\sin\omega t$ elmozdulás-függvényének első deriváltját (a $v(t)$ sebességet) $x_0=0$ kezdeti feltétel mellett Laplace-transzformáció segítségével!

Megoldás

$$\begin{array}{ccc}
 x(t)=\sin\omega t & \longrightarrow & X(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\
 & & \downarrow \text{deriválás} \\
 \underline{v(t) = \omega \cos \omega t} & \longleftarrow & V(s) = sX(s) - 0 = \omega \frac{s}{s^2 + \omega^2}
 \end{array}$$

e) Végérték-tétel

Egy időtartománybeli $f(t)$ függvény határértékét $t \rightarrow \infty$ esetén az alábbi definíció szerint számíthatjuk:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \tag{4.69}$$

4.8. Példa. Határozzuk meg az $f(t) = 5(1 - e^{-2t})$ függvény határértékét, ha $t \rightarrow \infty$.

Megoldás

A függvény Laplace-transzformáltja: $(5=5 \cdot 1(t) \rightarrow L(5)=5/s)$

$$F(s) = \frac{5}{s} - 5 \frac{1}{s+2}$$

A függvény határértéke:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{5}{s} - \frac{5}{s+2} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(5 - \frac{5s}{s+2} \right) = 5$$

4.3.2. Átviteli függvény

A Laplace-transzformáció egy további fontos alkalmazásához tekintsük adottnak a következő rendszeregyenletet:

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_1 \frac{dx_b}{dt} + b_0 x_b \quad (4.70)$$

Vegyük először mindkét oldal Laplace-transzformáltját a kezdeti feltételek figyelembevételével:

$$\begin{aligned} a_2[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + a_1[sX(s) - x(0)] + a_0X(s) = \\ = b_1[sX_b(s) - x_b(0)] + b_0X_b(s) \end{aligned} \quad (4.71)$$

Rendezzük az egyenletet a következő alakra:

$$\begin{aligned} X(s)[a_2s^2 + a_1s + a_0] = \\ = X_b(s)[b_1s + b_0] + a_2sx(0) + a_2\dot{x}(0) + a_1x(0) - b_1x_b(0) \end{aligned} \quad (4.72)$$

Képezzük a kimenet és a bemenet Laplace-transzformáltjának hányadosát:

$$\frac{X(s)}{X_b(s)} = \underbrace{\frac{b_1s + b_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0}}_{\text{rendszerre jellemző}} + \underbrace{\frac{a_2sx(0) + a_2\dot{x}(0) + a_1x(0) - b_1x_b(0)}{a_2s^2 + a_1s + a_0}}_{\text{kezdeti feltételekre jellemző}} \quad (4.73)$$

Most tételezzük fel azt a gyakori esetet, hogy az összes kezdeti feltétel zérus. Mivel a kezdeti feltételeket a második tört tartalmazza, annak értéke ekkor zérus.

A kimenő és bemenő jel zérus kezdeti feltételekkel vett Laplace-transzformáltjának hányadosát átviteli függvénynek nevezzük.

$$Y(s) = \frac{X(s)}{X_b(s)} \quad (4.74)$$

Az átviteli függvény kitüntetett szereppel bír a szabályozástechnikai alkalmazásokban. Szakember nehézség nélkül megállapítja az átviteli függvényből a szabályozási tag tulajdonságait.

Az átviteli függvény ismerete egyenértékű a rendszeregyenlet ismeretével, mivel az átviteli függvény alapján felírhatjuk a rendszeregyenletet.

Tekintsük adottnak a következő alakban adott átviteli függvényt:

$$Y(s) = \frac{X(s)}{X_b(s)} = \frac{b_1s + b_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0} \quad (4.75)$$

Végezzük el a „keresztbe szorzást”

$$(a_2s^2 + a_1s + a_0)X(s) = (b_1s + b_0)X_b(s) \quad (4.76)$$

Mivel az s -sel való szorzás az operátor tartományban deriválást jelent, ezért az idő tartományba úgy térhetünk vissza, hogy s helyébe formálisan

$$s \rightarrow \frac{d}{dt}$$

a differenciálás operátorát, $X(s)$ helyébe pedig $x(t)$ -t írunk:

$$\left(a_2 \frac{d^2}{dt^2} + a_1 \frac{d}{dt} + a_0\right)x(t) = \left(b_1 \frac{d}{dt} + b_0\right)x_b(t) \quad (4.77)$$

A (4.77) egyenletet a szokásos formában felírva kapjuk a rendszeregyenletet:

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0x = b_1 \frac{dx_b}{dt} + b_0x_b \quad (4.78)$$

Ezzel visszakaptuk a (4.70) kiindulási egyenletet.

4.3.3. A frekvenciafüggvény származtatása az átviteli függvényből

Vegyük észre, hogy a (4.75) átviteli függvény alakilag teljesen megegyezik az exponenciális (szinuszos) bemenetre adott (4.45) amplitúdó nagyítási függvénnyel, ha s helyébe $j\omega$ -t helyettesítünk.

A frekvenciafüggvényt az átviteli függvényből is származtathatjuk $s=j\omega$ helyettesítéssel.

$$Y(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{X_b(j\omega)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow A(\omega) = |Y(j\omega)| \\ \rightarrow \varphi(\omega) = \varphi_N(\omega) - \varphi_D(\omega) \end{array} \right. \quad (4.79)$$

A kimenő szinuszjel amplitúdójának és a bemenő szinuszjel amplitúdójának aránya az amplitúdó nagyítási függvény, mely a frekvenciafüggvény abszolút értékeként adódik (valós függvény):

$$A(\omega) = |Y(j\omega)| \quad (4.80)$$

A kimenő és bemenő szinusz jel fáziseltérése a számláló és nevező fázis-

$$\varphi = \varphi_N - \varphi_D \quad (4.81)$$

szögének különbsége.

A kimenőjel időfüggvénye a következő:

$$x = A(\omega)\hat{x}_b \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.82)$$

4.3.4. Általánosított impedancia

Az egyes rendszerelemekre is értelmezhetünk egy átviteli függvényhez hasonló mennyiséget, a komplex impedanciát.

A komplex impedanciát a keresztváltozó és az átmenő változó Laplace-transzformáltjának hányadosaként számíthatjuk:

$$Z(s) = \frac{V(s)}{F(s)} \quad (4.83)$$

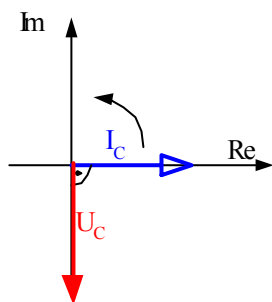
Például villamos kondenzátorra a komplex impedancia:

$$Z_C(s) = \frac{U_C(s)}{I_C(s)} = \frac{U_C(s)}{CsU_C(s)} = \frac{1}{sC} \quad (4.84)$$

Megjegyzés: a középiskolában a kondenzátor impedanciájára tanult $X_C = \frac{1}{\omega C}$ nem más, mint $|Z_C|$. A komplex impedancia azonban több információt szolgáltat, mert az áram és feszültség fáziseltérése is kiolvasható belőle. Rendezzük át (4.84) egyenletet a következő alakra szinuszos bemenetet feltételezve ($s=j\omega$):

$$U_C = \frac{1}{sC} I_C = \frac{1}{j\omega C} I_C = \frac{-j}{\omega C} I_C \quad (4.85)$$

A 4.16. ábrából láthatóan a feszültség 90 fokkal késik az áramhoz képest.



4.16. ábra

Az induktivitás impedanciája:

$$Z_L(s) = \frac{U_L(s)}{I_L(s)} = \frac{LsI_L(s)}{I_L(s)} = sL \quad (4.86)$$

Villamos ellenállásra:

$$Z_R = R$$

Hasonló módon, de kevésbé szokásosan más rendszerek elemeire is értelmezhető a komplex impedancia.

Lengéscsillapító komplex impedanciája:

$$Z_k = \frac{V_k(s)}{F_k(s)} = \frac{V_k(s)}{kV_k(s)} = \frac{1}{k} \tag{4.87}$$

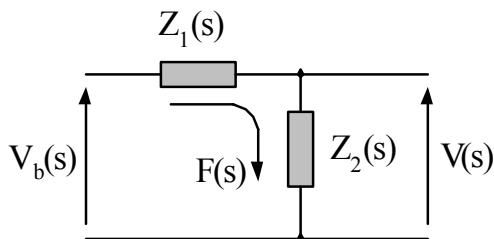
Tömegre:

$$Z_m = \frac{V_m(s)}{F_m(s)} = \frac{V_m(s)}{msV_m(s)} = \frac{1}{sm} \tag{4.88}$$

Rugóra:

$$Z_c(s) = \frac{V_c(s)}{F_c(s)} = \frac{V_c(s)}{c \frac{1}{s} V_c(s)} = \frac{s}{c} \tag{4.89}$$

Az elemek komplex impedanciáit különösen villamos kapcsolások átviteli függvényének felírásakor használhatjuk előnyösen (4.17. ábra).



4.14. ábra

Feszültség (keresztváltzó)-osztó típusú kapcsolásoknál a körben folyó extenzív mennyiség:

$$F(s) = \frac{V_b(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \tag{4.90}$$

A kimeneti intenzív mennyiség:

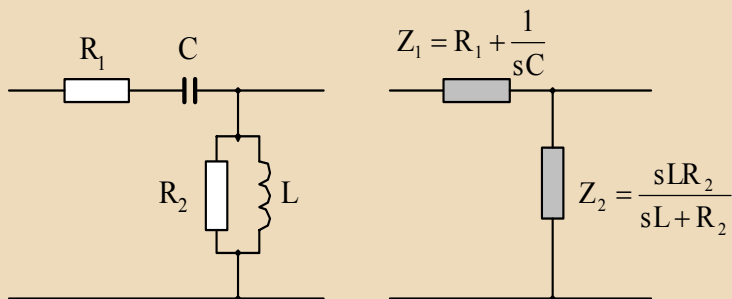
$$V(s) = F(s)Z_2(s) = V_b(s) \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \quad (4.91)$$

A keresztváltozó-osztó típusú rendszer átviteli függvénye az

$$Y(s) = \frac{V(s)}{V_b(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \quad (4.92)$$

összefüggéssel számítható. Az egyes impedanciák jelenthetik több, sorosan és/vagy párhuzamosan kapcsolt impedancia eredőjét.

4.9. Példa. Határozzuk meg a 4.15. ábrán látható villamos kapcsolás átviteli függvényét!



4.15. ábra

Megoldás

Először meghatározzuk a sorosan kapcsolt R_1 és C eredőjét, valamint a párhuzamosan kapcsolt R_2 és L eredőjét, majd alkalmazzuk a (4.81) összefüggést.

$$Y(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} = \frac{R_1 + \frac{1}{sC}}{\frac{sLR_2}{sL + R_2}} = \frac{s^2 LCR_2}{s^2 LC(R_1 + R_2) + s(L + R_1 R_2 C) + R_2}$$

5. Vegyes feladatok a rendszeregyenlet megoldására

Ebben a fejezetben a fokozatosság elvét betartva a műszaki élet eltérő területeiről válogattunk példákat. Arra törekedtünk, hogy az előző fejezetekben bemutatott módszerek mindegyikére találjon példát az olvasó. A megoldási módszerek közötti eligazodást segíti az alábbi táblázat, ahol feltüntettük a gerjesztés fajtáját, az átviteli függvény célszerű származtatását-ahol ez lehetséges, valamint a javasolt megoldási módszert.

	Gerjesztés			
	Nincs homogén	Szinuszos inhomogén	Periodikus inhomogén	Általános inhomogén
Diff.-egyenlet	Nincs értelmezve	$Y(s)$ $Y(j\omega)$	Harmonikus összetevők frekvencia-átviteli fv-e. $Y_k(j\omega_k)$	$Y(s)$
Rendszer átviteli függvénye	Rendszer-egyenlet van csak	Rendszer-egyenlet → $L \rightarrow Y(j\omega)$ vagy keresztváltó osztó	Rendszer-egyenlet → $L \rightarrow Y(s) \rightarrow Y(j\omega)$	Rendszer-egyenlet → $L \rightarrow Y(s)$
Átv. fv. származtatása				
Módszer	Diff. egyenlet megoldása idő vagy operátor tartományban	Diff. egyenlet megoldása idő vagy operátor tartományban $X_b(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	Bemenet Fourier-sorba fejtése és frekvencia-módszer ($s \rightarrow j\omega$) és szuperpozíció	Diff. egyenlet megoldása idő vagy operátor tartományban

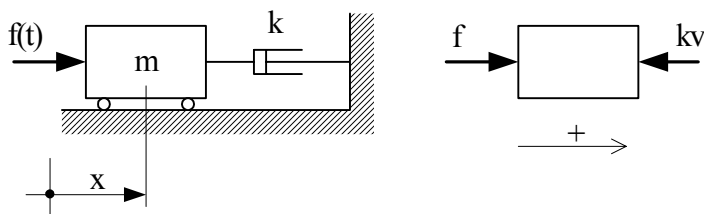
Megoldás	tranziens	általános	állandósult	általános
Példa	5.1, 5.6	5.3a	4.3	5.2, 5.4, 5.5
Módszer		Frekvencia- módszer		
Megoldás		$Y(s) \rightarrow Y(j\omega)$		
Példa		$A(\omega), \varphi(\omega)$ állandósult		
		5.3b, 5.7, 5.8		

Az áttekinthetőség érdekében a táblázatban feltüntettük az egyes eseteket bemutató példák sorszámát is.

5.1. Példa

Az $m=4$ kg nagyságú tömeg és a fal közé $k=6$ Ns/m csillapítási tényezőjű hidraulikus csillapítót szerelünk. A tömegre $f(t)$ gerjesztő erő hat (5.1. ábra)

- Írjuk fel a rendszeregyenletet, ha bemenetnek az erőt, kimenetnek a tömeg sebességét tekintjük!
- Oldjuk meg rendszeregyenletet, ha a gerjesztő erő $f(t)=0$, a tömeg kezdeti sebessége $v(0)=10$ m/s.
- Határozzuk meg a sebesség állandósult értékét!
- Határozzuk meg az elmozdulás időfüggvényét!



5.1. ábra

Megoldás

ad a)

Mechanikus rendszerek rendszeregyenletének (mozgásegyenletének) felírása legegyszerűbben úgy történik, hogy a testet kimozdítjuk egyensúlyi helyzetéből, meghatározzuk a testre ható erőket, majd felírjuk Newton II. axiómáját. Egyenes vonalú mozgás esetén

$$\Sigma F_i = m \cdot a$$

ahol ΣF a testre a mozgás irányában ható erők eredője. Jelen esetben a tömegre az $f(t)$ gerjesztő erő és a $-k(v-0)$ sebességarányos csillapítóerő hat. Ezek eredője gyorsítja a testet.

$$f(t) - k \cdot v = m \cdot a$$

Az egyenletet úgy rendezzük, hogy bal oldalon a kimeneti mennyiségek álljanak

$$m \cdot a + k \cdot v = f(t)$$

Másképp felírva az egyenletet, az elsőrendű rendszerre jellemző alakot kapjuk.

$$\underline{\underline{m \frac{dv}{dt} + kv = f(t)}}$$

ad b)

$F=0$ esetén a rendszer gerjesztetlen, a differenciálegyenlet homogén (jobb oldala zérus):

$$m \frac{dv}{dt} + kv = 0$$

A vizsgált rendszer csupán a kezdeti feltételeknek megfelelően mozog. (Megjegyzendő, hogy speciális $x(0)=0$ és $v(0)=0$ kezdeti feltételek esetén a rendszer nyugalomban maradna).

A rendszeregyenlet megoldására a számos lehetőség közül a *Laplace*-transzformáció módszerét alkalmazzuk. Az első derivált kiszámításakor ügyeljünk a kezdeti feltétel helyes figyelembe vételére! A *Laplace*-transzformáltat nagybetűvel jelölve

$$m[sV(s) - v(0)] + kV(s) = 0$$

Kiemelve a kimeneti változót

$$V(s)[ms + k] - mv(0) = 0.$$

Innen átrendezés és behelyettesítés után

$$V(s) = \frac{mv(0)}{ms + k} = \frac{4 \cdot 10}{4s + 6}$$

Az időtartománybeli választ a kimenőjel *Laplace*-transzformáltjából inverz *Laplace*-transzformáció alkalmazásával nyerjük. Ehhez $V(s)$ -t át kell alakítani olyan alakra, amely alak szerepel a transzformációs táblázatokban:

$$V(s) = \frac{10}{s + 1,5} = 10 \frac{1}{s + 1,5}$$

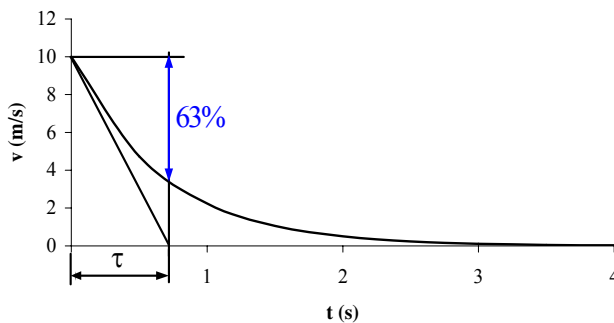
A visszatranszformálás után kapott időfüggvény:

$$v(t) = \mathbf{L}^{-1}[V(s)] = 10e^{-1,5t}$$

A rendszer időállandója az exponenciális függvény kitevőjében a „ t ” együttthatójának reciproka:

$$T = \frac{1}{1,5} \approx 0,66 \text{ s}$$

A sebesség időbeli alakulása az 5.2. ábrán látható.



5.2. ábra

ad c)

A tömeg állandósult sebességét a „*végérték-tétellel*” határozhatjuk meg:

A tömeg sebessége zérushoz tart, tehát bizonyos idő eltelte után nyuga-

$$v(t = \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sV(s) = \lim_{s \rightarrow 0} 10 \frac{s}{s + 1,5} = 0$$

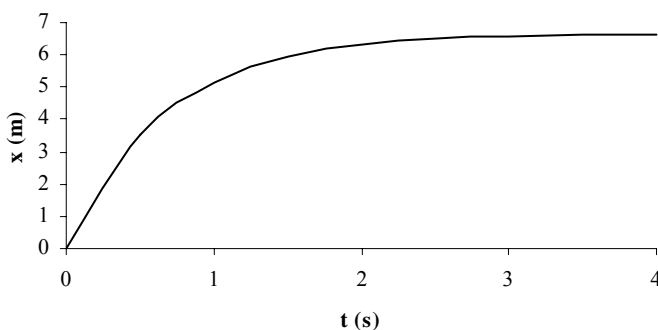
lomba kerül.

ad d)

Amennyiben a tömeg x elmozdulására vagyunk kíváncsiak, akkor azt akár idő, akár operátor tartományban végzett integrálással egyszerűen megkaphatjuk, ha pl. $x(0)=0$:

$$x(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau + x(0) = \int_0^t 10e^{-1,5\tau} d\tau = \frac{10}{-1,5} \left[e^{-1,5\tau} \right]_0^t = \underline{\underline{\frac{20}{3}(1 - e^{-1,5t})}}$$

Az elmozdulás-idő diagram az 5.3. ábrán látható.



5.3. ábra

5.2. Példa

Az 5.1. Példa adatait felhasználva legyen a gerjesztő erő $f(t)=20 \cdot 1(t)$ [N] ugrásfüggvény, a tömeg kezdeti sebessége $v(0)=10$ m/s.

- Határozza meg a tömeg sebesség-idő függvényét!
- Mekkora a tömeg állandósult sebessége?

ad a)

Ha a rendszer gerjesztése $20 \cdot 1(t)$ ugrásfüggvény, akkor a rendszeregyenlet

$$m[sV(s) - v(0)] + kV(s) = F(s) = 20 \frac{1}{s}$$

Laplace-transzformáltja (csak a jobb oldali gerjesztés változik):

Rendezés után

$$V(s) = \frac{\frac{20}{s} + mv(0)}{ms + k} = \frac{20}{s(ms + k)} + \frac{mv(0)}{ms + k} = \frac{20}{s(4s + 6)} + \frac{4 \cdot 10}{4s + 6} = \frac{20}{4} \frac{1}{s(s + 1,5)} + \frac{10}{s + 1,5}$$

Az időtartományba való visszatranszformálás érdekében az első törtet olyan parciális törtekre bontjuk, melyek szerepelnek a transzformációs táblázatokban:

$$\frac{1}{s(s + 1,5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1,5} = \frac{As + 1,5A + Bs}{s(s + 1,5)}$$

Összehasonlítva az eredeti és az átalakított tört számlálójában s együtthatóit:

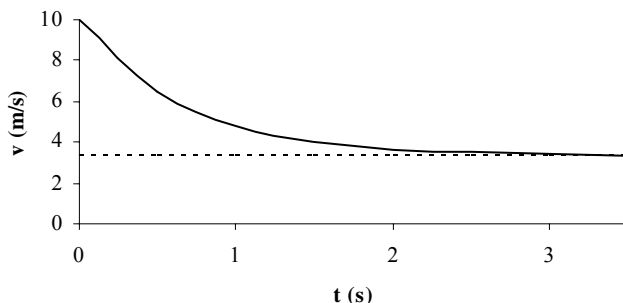
$$\begin{aligned} s^1: & \quad 0 = A + B \\ s^0: & \quad 1 = 1,5A \end{aligned}$$

$A = 2/3$, $B = -2/3$. A feltételei egyenletekből $A = 2/3$, $B = -2/3$. A kimenőjellel összevonás után:

$$V(s) = 5 \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s} - 5 \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s + 1,5} + 10 \frac{1}{s + 1,5} = \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{s} + \frac{20}{3} \cdot \frac{1}{s + 1,5}$$

Az időtartományba visszatranszformált kimenőjellel:

$$v(t) = 3,33 + 6,66e^{-1,5t}$$



5.4. ábra

A tömeg állandósult sebességét a végérték-tétellel számítjuk:

$$v(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sV(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{3,33}{s} + \frac{6,66}{s+1,5} \right) = \underline{\underline{3,33 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

5.3. Példa

Legyen az 1. példában a gerjesztő erő $f(t)=3 \cdot \sin 100t$, valamint a tömeg kezdeti sebessége $v(0)=0$. Határozzuk meg a tömeg kitérését, ha

- a teljes megoldásra
- csak az állandósult megoldásra vagyunk kíváncsiak.
- Rajzoljuk meg a rendszer BODE-diagramjait!

Megoldás

ad a)

Színuszos gerjesztés esetén a *Laplace*-transzformált rendszeregyenlet

$$m[sV(s) - v(0)] + kV(s) = 3 \frac{100}{s^2 + 100^2}$$

A sebesség *Laplace*-transzformáltja:

$$V(s) = \frac{300}{(ms + k)(s^2 + 100^2)} + \frac{v(0)}{ms + k}$$

A második törtet a zérus kezdősebesség miatt elhagyjuk, az első törtet pedig parciális törtekre bontjuk

$$\begin{aligned} \frac{300}{(ms + k)(s^2 + 100^2)} &= \frac{A}{ms + k} + \frac{Bs + C}{s^2 + 100^2} = \\ &= \frac{As^2 + 100^2 A + Bms^2 + Bks + Cms + Ck}{(ms + k)(s^2 + 100^2)} \end{aligned}$$

A számlálók együtthatóinak összehasonlításából:

$$\begin{aligned} s^2: & \quad 0 = A + Bm \\ s^1: & \quad 0 = Bk + Cm \\ s^0: & \quad 300 = 100^2 A + Ck \end{aligned}$$

Az egyenletrendszert megoldva $A=0,03$, $B=-0,0075$, $C=0,0113$ adódik. A megoldást visszatranszformálható alakba írjuk:

$$V(s) = 0,0075 \frac{1}{s+1,5} + 0,00000113 \frac{100}{s^2+100^2} - 0,0075 \frac{s}{s^2+100^2}$$

Időtartományba visszatranszformálva:

$$v(t) = 0,0075e^{-1,5t} + \underbrace{0,000113 \sin 100t - 0,0075 \cos 100t}_{K \sin(\omega t + \varphi)}$$

Az azonos körfrekvenciájú szinuszos és koszinuszos tagok összege fázisban eltolt szinuszos rezgés.

A rezgés amplitúdója:

$$K = \sqrt{0,000113^2 + 0,0075^2} = 0,0075$$

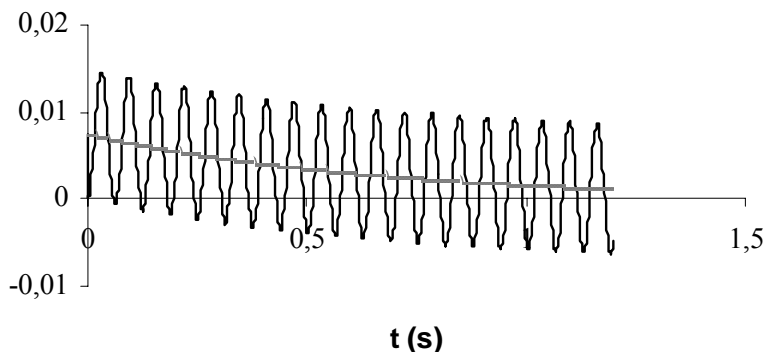
Fázisszöge:

$$\varphi = \tan^{-1}(-0,0075 / 0,000113) = -89,14^\circ = -1,555 \text{ rad}$$

A kimenőjel legegyszerűbb alakja tehát

$$\underline{\underline{v(t) = 0,0075e^{-1,5t} + 0,0075 \sin(100t - 1,555)}}$$

Figyeljük meg, hogy a megoldás első tagja idővel elhal (ez a kezdeti feltételeket figyelembe vevő tranzienst rész szaggatott vonallal ábrázolva), míg a második tag fáziseltolódással követi a gerjesztést (ez az állandósult rész) (5.5. ábra).



5.5 ábra

ad b)

Ha csak az állandósult megoldást keressük, akkor sokkal egyszerűbben célhoz érünk a „frekvencia-módszer” alkalmazásával. A rendszer átviteli függvénye a következő:

$$Y(s) = \frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms + k}$$

Az állandósult válaszjelet szinuszos bemenetre a frekvenciafüggvény segítségével a

$$V(j\omega) = Y(j\omega) \cdot F(j\omega)$$

összefüggés szerint kaphatjuk meg.

Az amplitúdó meghatározása

Az amplitúdó nagyítási függvény ($\omega = \omega_g = 100$ 1/s):

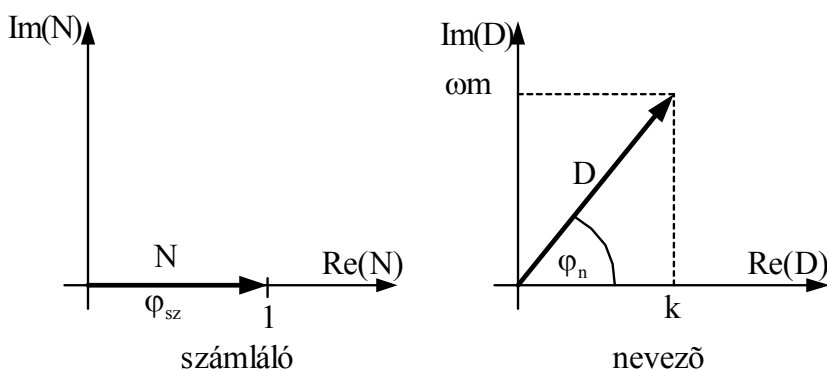
$$A(\omega_g) = |Y(j\omega_g)| = \frac{1}{|mj\omega_g + k|} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + (m\omega_g)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6^2 + 400^2}} = 0,0025$$

A kimenőjel amplitúdója ezzel a következő:

$$\hat{v} = A(\omega_g) \cdot \hat{f} = 0,0025 \cdot 3 = 0,0075 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A fázisszög meghatározása

A kimenőjel fázisszögét szintén a *frekvencia függvényből* határozhatjuk meg. Jelen esetben a számláló értéke 1, ami valós szám, tehát fázisszöge $\varphi_1=0$. A nevező fázisszöge $\varphi_2=\tan^{-1}(m\omega_g/k) = \tan^{-1}(4 \cdot 100/6)=1,555$ rad. A válaszjel fázisszöge $\varphi=0-1,555$ rad= $-1,555$ rad.



5.6. ábra

Ezzel a rendszer állandósult válasza:

$$v(t) = \hat{v} \sin(\omega_g \cdot t + \varphi) = \underline{\underline{0,0075 \sin(100t - 1,555)}} \text{ m/s}$$

Érdeemes megfigyelni, hogy a 3. Példa válaszában az állandósult részét a frekvencia-módszerrel sokkal egyszerűbben kaptuk meg.

ad c)

Az első BODE-diagram az $A(\omega)=|Y(j\omega)|$ *amplitúdó nagyítási függvényt* (nagyítási tényezőt) ábrázolja a gerjesztő frekvencia függvényében, logaritmikus [dB] léptékben. A vízszintes tengelyen a körfrekvencia logaritmikus léptékben, dekádban van felmérve. (A tízszeres frekvencia-arány 1 dekád, a százszoros frekvencia-arány 2 dekád stb.)

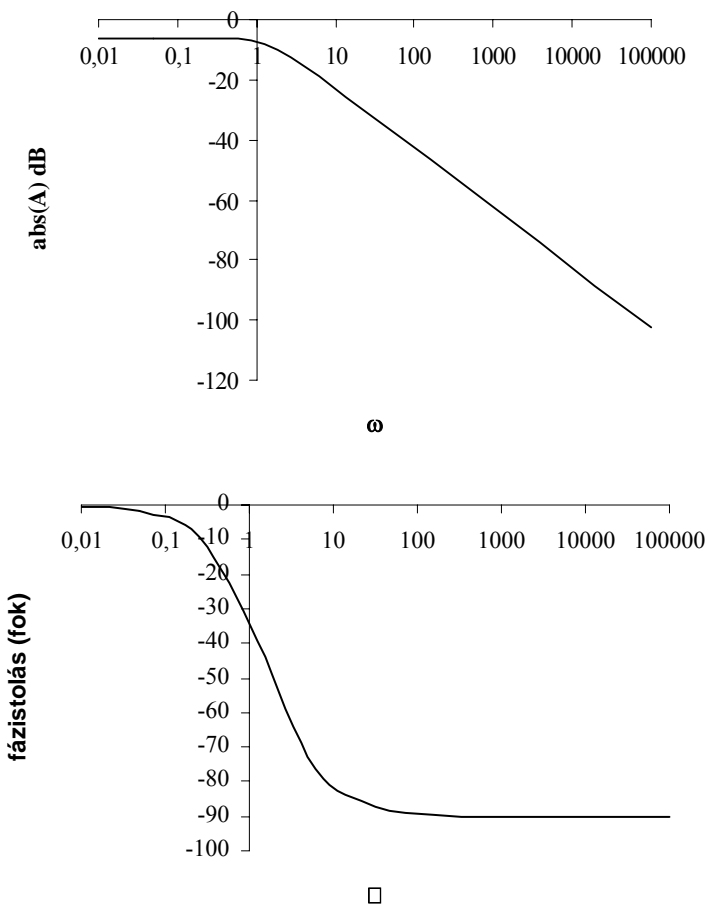
A második BODE-diagram pedig a válaszjel fázisszögét ábrázolja a gerjesztő frekvencia függvényében (5.7. ábra). A

$$20 \log A(\omega) = 20 \log \frac{3}{\sqrt{k^2 + m^2 \omega^2}} = 20 \log \frac{3}{\sqrt{36 + 16 \omega^2}}$$

amplitúdó nagytítási függvény és a

$$\varphi(\omega) = 0 - \tan^{-1}(m\omega / k) = -\tan^{-1}(0,66\omega)$$

fázisszög értékeit EXCEL diagramokban ábráztuk az 5.7. ábrán. Érdekes megfigyelni, hogy az amplitúdó diagram aszimptotájának meredeksége -20 dB/dekád .



A

$$20 \log A(\omega) = 20 \log \frac{3}{\sqrt{k^2 + m^2 \omega^2}} = 20 \log \frac{3}{\sqrt{36 + 16 \omega^2}}$$

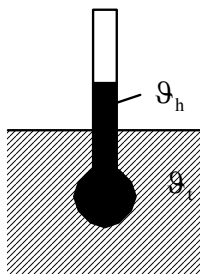
amplitúdó nagyítási függvény és a

$$\varphi(\omega) = 0 - \tan^{-1}(m\omega/k) = -\tan^{-1}(0,66\omega)$$

fázisszög értékeit EXCEL diagramokban ábráztuk az 5.7. ábrán. Érdekes megfigyelni, hogy az amplitúdó diagram aszimptotájának meredeksége -20 dB/dekád.

5.4. Példa

Egy hőmérőben $c=0,138$ kJ/kg $^{\circ}$ C fajhőjű, $m=1,5$ g tömegű higany van egy $A=1,1 \cdot 10^{-4}$ m 2 felületű üvegből készült tartályban elhelyezve. A mérendő test, az üveg tartály és a higany közötti eredő hőátadási tényező becsült értéke $\alpha=0,017$ kJ/m 2 sK (5.8. ábra).



5.8. ábra

- Írjuk fel a higany hőmérsékletére vonatkozó rendszeregyenletet, ha a $\vartheta_0=23$ $^{\circ}$ C környezeti hőmérsékleten lévő hőmérőt $\vartheta_t = 38$ $^{\circ}$ C testhőmérsékletű beteg hőmérsékletének mérésére használjuk!
- Határozzuk meg a hőmérő által mutatott hőmérséklet (a higany hőmérsékletének) változását 0-600s időtartományban!

Megoldás**ad a)**

A rendszeregyenlet felírásához az energiamódszert célszerű alkalmazni:

$$P_{\text{be}} = \frac{d}{dt} E_{\text{tárolt}} + P_{\text{veszt}}$$

A hőmérőbe egységnyi idő alatt beáramló hőenergia hőátadással kerül a testből a higanyba, és ott teljes egészében tárolódik, mivel veszteség nincs. A higany kis térfogata következtében a hővezetést elhanyagoljuk, vagyis az egész higany mennyiséget azonos hőmérsékletűnek tételezzük fel. Eltekin-tünk továbbá a kapilláris ellenállásától is. Az energiaegyensúly ezzel:

$$\alpha A(\vartheta_t - \vartheta) = \frac{d}{dt} cm(\vartheta - \vartheta_0) + 0$$

Vegyük figyelembe, hogy ϑ_0 konstans, ezért idő szerinti deriváltja zérus. Ezzel a rendszeregyenlet

$$cm \frac{d\vartheta}{dt} + \alpha A \vartheta = \alpha A \vartheta_t$$

alakú lesz.

ad b)

Elvégezve a *Laplace*-transzformációt, a gerjesztést ugrásfüggvénynek modellezve a következő összefüggést nyerjük:

$$cm[sT(s) - \vartheta(0)] + \alpha AT(s) = \alpha A \frac{\vartheta_t}{s}$$

A higany hőmérsékletének Laplace-transzformáltját kifejezve

$$T(s) = \frac{\alpha A \vartheta_t}{cm} \cdot \frac{1}{s(s + \frac{\alpha A}{cm})} + \frac{\vartheta(0)}{s + \frac{\alpha A}{cm}}$$

A parciális törtekre bontás után időtartományba visszatranszformálva exponenciálisan növekvő hőmérsékletváltozást kapunk:

$$\vartheta(t) = \vartheta_t + (\vartheta_0 - \vartheta_t)e^{-\frac{\alpha A}{cm}t}$$

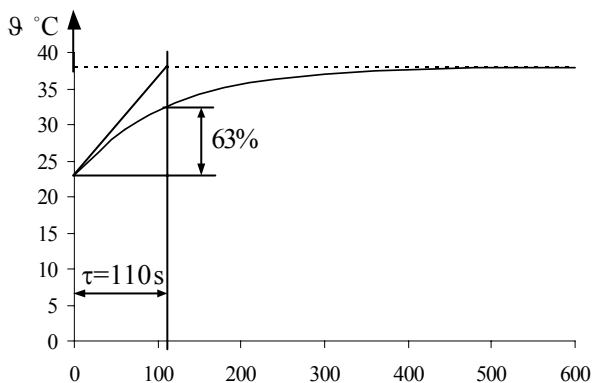
Az időállandó:

$$\tau = \frac{cm}{\alpha A} = \frac{0,138 \cdot 0,0015}{0,017 \cdot 1,1 \cdot 10^{-4}} = 110,7 \text{ s}$$

Az értékeket behelyettesítve a higany hőmérsékletváltozása, illetve a mutatott hőmérséklet 10 perc után:

$$\underline{\underline{\vartheta(600) = 38 + (23 - 38)e^{-\frac{600}{110,7}} = \underline{\underline{37,96 \text{ °C}}}}$$

Láthatóan a hőmérő 10 perc ($\approx 5\tau$) után a tényleges hőmérsékletet mutatja (5.9. ábra).

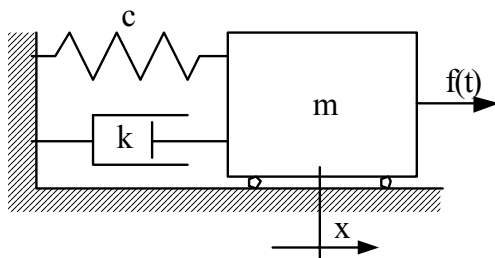


5.9. ábra

5.5. Példa

Az $m=2$ kg tömeget a falhoz $c=2 \cdot 10^4$ N/m merevségű rugóval és $k=60$ Ns/m csillapítási tényezőjű sebességarányos csillapítóval rögzítettük (5.10. ábra). A nyugó tömegegre $f=10 \cdot \delta(t)$ [Ns] impulzusgerjesztést működtetünk.

- Írjuk fel a rendszer átviteli tényezőjét!
- Határozzuk meg a tömeg elmozdulását az idő függvényében!



5.10. ábra

Megoldás

ad a)

A tömeget egyensúlyi helyzetéből kimozdítva felírjuk a tömegegre ható erőket:

$$f_g(t) - kv - cx = ma$$

Másképp írva

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + cx = f_g(t)$$

Véve az egyenlet *Laplace*-transzformáltját zérus kezdeti feltételek mellett:

$$ms^2X(s) + ksX(s) + cX(s) = F_g(s)$$

Az átviteli függvény:

$$Y(s) = \frac{X(s)}{F_g(s)} = \frac{1}{\underline{\underline{ms^2 + ks + c}}}$$

ad b)

A válaszjel:

$$X(s) = Y(s)F_g(s) = \frac{1}{ms^2 + ks + c} \cdot 10 = \frac{5}{(s^2 + 30s + 10^4)}$$

Alkalmazzuk a Laplace-transzformáltak táblázatának 10. sorában lévő

$$F(s) = \frac{\alpha}{s^2 + 2\beta s + \alpha^2} \leftrightarrow f(t) = \frac{\alpha}{\gamma} e^{-\beta t} \sin \gamma t$$

transzformációs összefüggést (α a csillapítatlan sajátfrekvencia). $X(s)$ kifejezését kissé átalakítva

$$X(s) = 0,05 \frac{100}{s^2 + 2 \cdot 15s + 100^2}$$

kiolvashatjuk az egyes paramétereket: $\alpha=100$ 1/s, $\beta=15$ 1/s, $D=\beta/\alpha=0,15$.

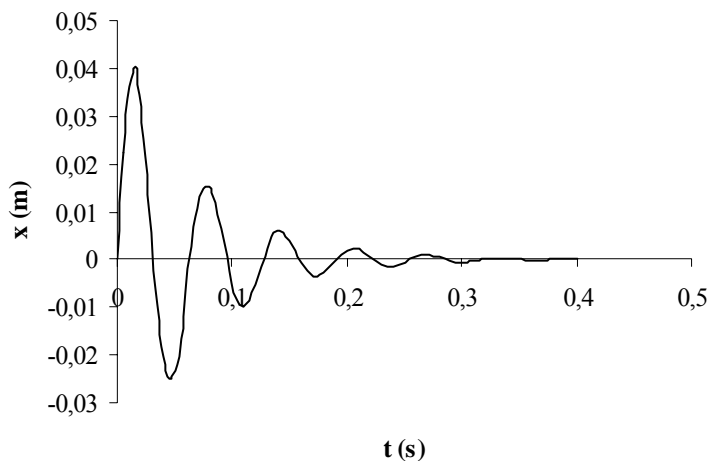
A csillapodó lengések körfrekvenciája:

$$\gamma = \alpha \sqrt{1 - D^2} = 100 \sqrt{1 - 0,15^2} = 98,87 \text{ 1/s}$$

Időtartományban a megoldás tehát:

$$\begin{aligned} x(t) &= 0,05 \frac{\alpha}{\gamma} e^{-\beta t} \sin \gamma t = 0,05 \frac{100}{98,87} e^{-15t} \sin(98,87t) = \\ &= \underline{\underline{0,0505 e^{-15t} \sin(98,87t)}} \end{aligned}$$

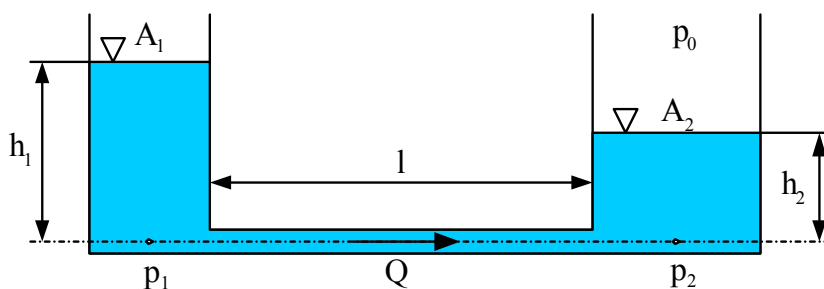
A megoldás egy lecsengő szinuszos rezgés (5.11. ábra).



5.11. ábra

5.6. Példa

Egy $A_1=2\text{m}^2$ alapterületű és egy $A_2=3\text{m}^2$ alapterületű tartályt alul egy $l=10\text{m}$ hosszú, $A=0,01\text{m}^2$ keresztmetszetű, elhanyagolható hidraulikus ellenállású csővezeték köt össze. A tartályokban víz van, mely kezdeti szintkülönbsége $h_1-h_2=0,5\text{m}$ (5.12. ábra).



5.12. ábra

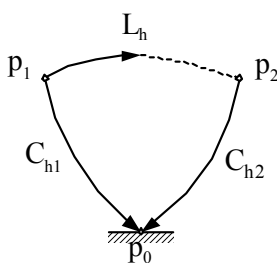
Feladat:

- Rajzoljuk meg a rendszer struktúra-gráfját!
- Határozzuk meg a vízszint ingadozásának frekvenciáját és a térfogatáram változását!
- Rajzoljuk meg a rendszer villamos és mechanikus megfelelőjét (analógiát)!

Megoldás:

ad a)

Először fel kell ismernünk azokat a csomópontokat, ahol a keresztváltozó (nyomás) értéke különböző. Jelen esetben p_1 és p_2 nyomások különböznek, mivel a rájuk nehezedő vízoszlop $\rho \cdot g \cdot h$ hidrosztatikus nyomása eltérő. Ez a p_1 - p_2 nyomáskülönbség gyorsítja az alsó csőben a folyadékot, melynek tehetetlenségét az L_h *inertivitással* vesszük figyelembe. A rendszer elemeinek kapcsolatát kifejező struktúra-gráf a következő:



5.13. ábra

ad b)

A rendszeregyenlet a csomóponti módszerrel írjuk fel a gráf alapján. A csomópontba befolyó térfogatáramot tekintjük pozitívnak, az elfolyó áramot negatívnak. Az 1. csomópont egyensúlya:

$$-Q_{C1} - Q_{Lh} = 0$$

Az elemek fizikai egyenleteit behelyettesítve:

$$-C_{h1} \frac{d(p_1 - p_0)}{dt} - \frac{1}{L_h} \cdot \int (p_1 - p_2) dt = 0$$

Hasonlóan a 2. csomópontra:

$$-C_{h2} \frac{d(p_1 - p_0)}{dt} + \frac{1}{L_h} \cdot \int (p_1 - p_2) dt = 0$$

A csomóponti egyenleteket idő szerint deriváljuk, hogy differenciálegyenletet kapjunk (p_0 =állandó, ezért idő szerinti deriváltja zérus!):

$$-C_{h1} \frac{d^2 p_1}{dt^2} - \frac{1}{L_h} (p_1 - p_2) = 0$$

$$-C_{h2} \frac{d^2 p_2}{dt^2} + \frac{1}{L_h} (p_1 - p_2) = 0$$

Fejazzük ki a második deriváltakat mindkét egyenletből:

$$\frac{d^2 p_1}{dt^2} = -\frac{1}{C_1 I_f} (p_1 - p_2)$$

$$\frac{d^2 p_2}{dt^2} = \frac{1}{C_2 I_f} (p_1 - p_2)$$

Vonjuk ki a két egyenletet egymásból és rendezzünk nullára:

$$\frac{d^2 p_1}{dt^2} - \frac{d^2 p_2}{dt^2} + \frac{p_1 - p_2}{I_f} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = 0$$

Tekintsük változónak a $p_{12} = p_1 - p_2$ nyomáskülönbséget, továbbá vezessük be a $\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_{h1}} + \frac{1}{C_{h2}}$ jelölést az eredő kapacitásra, ekkor a **rendszeregyenlet** az alábbi alakú lesz:

$$\frac{d^2 p_{12}}{dt^2} + \frac{1}{L_h C_{12}} p_{12} = 0$$

Ez a harmonikus rezgőmozgás jól ismert egyenlete, ahol

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{L_h C_{12}}}$$

a sajátrezgések körfrekvenciája.

Megjegyzés: a másodrendű differenciálegyenletből látszik, hogy nem három, hanem csak két független energiatároló van a rendszerben (az inertivitás és a tartályok eredő kapacitása).

Kiszámítva a csőben áramló víz tehetetlenségére jellemző *inertivitást*,

$$L_h = \frac{\rho l}{A} = \frac{1000 \cdot 10}{0,01} = 10^6 \quad \text{kg/m}^4$$

A kapacitások:

$$C_1 = \frac{A_1}{\rho \cdot g} = \frac{2}{1000 \cdot 10} = 0,0002 \quad \text{m}^4 \text{s}^2 / \text{kg}$$

$$C_2 = \frac{A_2}{\rho \cdot g} = \frac{3}{1000 \cdot 10} = 0,0003 \quad \text{m}^4 \text{s}^2 / \text{kg}$$

A redukált kapacitás:

$$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-4} + 3 \cdot 10^{-4}} = 1,2 \cdot 10^{-4} \quad \text{m}^4 \text{s}^2 / \text{kg}$$

A folyadék lengések körfrekvenciája:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{L_h C_{12}}} = \sqrt{\frac{1}{10^6 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4}}} = 0,091 \quad 1/\text{s}$$

A lengések frekvenciája:

$$f = \frac{\alpha}{2\pi} = \underline{\underline{0,0145}} \quad \text{Hz}$$

A harmonikus rezgőmozgás egy lehetséges megoldása

$$p_{12} = K \sin(\alpha t + \varphi)$$

alakban írható fel. A térfogatáram meghatározásához a megoldás K és φ konstansait a kezdeti feltételekből határozhatjuk meg: $p_{12}(0) = \rho g \Delta h = 1000 \cdot 10 \cdot 0,5 = 5000 \text{ Pa}$ és $dp_{12}/dt(0) = 0$. Behelyettesítve

$$5000 = K \sin \varphi$$

$$0 = K\alpha \cos \varphi \Rightarrow \varphi = 90^\circ, \quad K = 5000 \text{ Pa}$$

A megoldás ezzel:

$$p_{12} = 5000 \sin(0,091t + \pi/2) = 5000 \cos(0,091t) \quad \text{Pa}$$

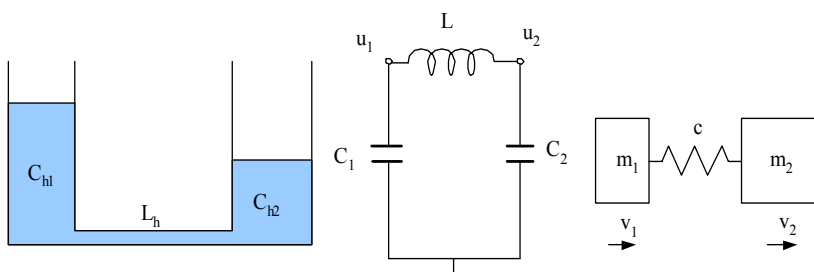
A térfogatáram most már kiszámítható:

$$Q = \frac{1}{L_h} \int p_{12} dt = \frac{1}{10^6} \int 5000 \cos(0,091t) dt = \underline{\underline{0,0549 \sin(0,091t)}} \quad \text{m}^3 / \text{s}$$

ad c)

A villamos és mechanikus analóg rendszerek az 5.14. ábrán láthatók, differenciálegyenleteik azonos típusúak.

5.14. ábra



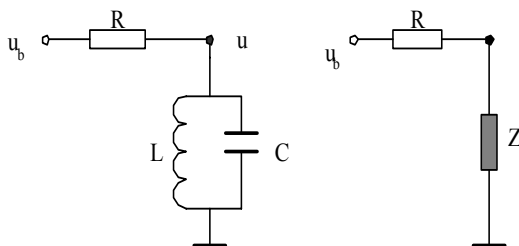
$$\frac{d^2 p_{12}}{dt^2} + \frac{1}{L_h C_{12}} p_{12} = 0$$

$$\frac{d^2 u_{12}}{dt^2} + \frac{1}{LC_{12}} u_{12} = 0$$

$$\frac{d^2 v_{12}}{dt^2} + \frac{1}{cm_{12}} v_{12} = 0$$

5.7. Példa

Egy \$R=1000\Omega\$ ellenállásból, \$L=0,1\text{H}\$ induktivitásból, valamint \$C=10^{-5}\text{F}\$ kapacitásból álló villamos áramkör (passzív sávszűrő) látható az 5.15. ábrán.



5.15. ábra

Feladat:

- a) Határozzuk meg az áramkör átviteli tényezőjét, ha a bemenet u_b , a válasz u .
- b) Számítsuk ki a válaszjelet, ha a bemenet $u_b = 5 \cdot \sin(50t)$!

Megoldás

ad a)

Villamos áramkörök átviteli tényezőjét az általánosított impedanciákkal egyszerűen felírhatjuk, mivel az elemek soros és/vagy párhuzamos kapcsolása egyszerűen felismerhető.

Vegyük észre, hogy az áramkör visszavezethető egy terheletlen keresztváltó osztóra (feszültségosztóra). Először a párhuzamosan kapcsolt tekercs és kondenzátor eredő impedanciáját számítjuk ki:

$$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{sL} + \frac{1}{\frac{1}{sC}} = \frac{1+s^2LC}{sL} \Rightarrow Z_2 = \frac{sL}{1+s^2LC}$$

A feszültségosztó általános (4.85) összefüggését alkalmazva komplex impedanciákra és jelekre ($Z_1=R$):

$$U(s) = U_b(s) \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = U_b(s) \frac{\frac{sL}{1+s^2LC}}{R + \frac{sL}{1+s^2LC}} = U_b(s) \frac{sL}{s^2RLC + sL + R}$$

Az áramkör átviteli tényezője:

$$Y(s) = \frac{U(s)}{U_b(s)} = \frac{sL}{\underline{\underline{s^2RLC + sL + R}}} \quad (5.1)$$

ad b)

A szinuszos bemenetre adott választ a frekvencia függvény segítségével állítjuk elő. A frekvenciafüggvény az átviteli függvényből $s \rightarrow j\omega$ helyettesítéssel adódik:

$$Y(j\omega) = \frac{j\omega L}{R - \omega^2 RLC + j\omega L}$$

Az amplitúdó nagyítás:

$$A(\omega) = |Y(j\omega)| = \frac{\omega L}{\sqrt{(R - \omega^2 RLC)^2 + (\omega L)^2}}$$

Az adott körfrekvencián

$$A(314) = \frac{314 \cdot 0,1}{\sqrt{(10^3 - 314^2 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 10^{-5})^2 + (314 \cdot 0,1)^2}} = 0,0348$$

Ezzel a kimenőjel amplitúdója

$$\hat{u} = \hat{u}_b \cdot A(314) = 5 \cdot 0,0348 = 0,174 \quad \text{V}$$

A kimenőjel fáziskésésének kiszámításához a frekvenciafüggvény számlálójának fázisszöge $\varphi_1 = 90^\circ$, mivel a számláló tisztán képzetes. A nevező fázisszöge

$$\varphi_2 = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R - \omega^2 RLC} = \tan^{-1} \frac{314 \cdot 0,1}{10^3 (1 - 314^2 \cdot 0,1 \cdot 10^{-5})} = 2^\circ$$

A fáziseltérés:

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 90 - 2 = 88^\circ = 1,53 \text{ rad}$$

A kimenőjel tehát

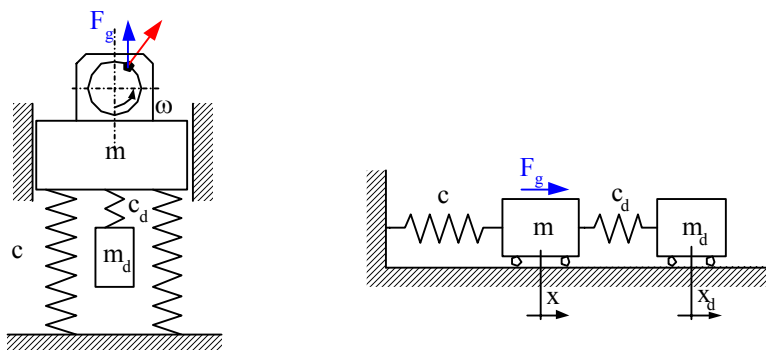
$$u = \underline{\underline{0,174 \cdot \sin(314t + 1,53) \text{ V}}}$$

5.8. Példa

Egy $\omega=100$ 1/s szögsebességgel forgó motor forgórészére a kiegyensúlyozatlanság következtében $F_c=50$ N centrifugális erő hat. A motor $m=50$ kg tömegű gépalaphoz van rögzítve, mely $c=10^4$ N/m eredő merevségű rugókon nyugszik. A gépalaphoz $m_d=2$ kg tömeget kapcsolunk $c_d=2 \cdot 10^3$ N/m merevségű rugóval.

Feladat:

- a) Határozzuk meg a gerjesztés időfüggvényét!
- b) Mekkora a gépalap rezgésamplitúdója?
- c) Milyen m_d tömegű ún. dinamikus lengésfojtót kell a gépalaphoz kapcsolni a c_d merevségű rugóval, ha azt szeretnénk elérni, hogy a gépalap állandósult rezgése zérus legyen?



5.16. ábra

Megoldás

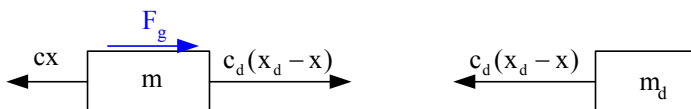
ad a)

A centrifugális erő függőleges vetülete gerjeszti a lengőrendszert:

$$F_g(t) = F_c \sin(\omega t) = 50 \cdot \sin(100t)$$

ad b)

A rendszert a szemléletesség kedvéért vízszintesen elfektetve rajzoljuk le. A tömegeket kissé kimozdítva képzeljük egyensúlyi helyzetükből, $x_d > x$ feltételezéssel. Az egyes tömegeket külön vizsgáljuk. A free-body diagramok megrajzolása után alkalmazzuk Newton II. axiómáját:



5.17. ábra

Az egyes testek mozgásegyenletei:

$$\begin{aligned}
 -c_x + c_d x_d - c_d x + F_g &= m \ddot{x} \\
 -c_d x_d + c_d x &= m_d \ddot{x}_d
 \end{aligned}$$

A differenciálegyenlet-rendszert zérus kezdeti feltételekkel elvégzett Laplace-transzformációval átalakítjuk algebrai egyenletrendszerre:

$$X(s)(ms^2 + c + c_d) = F_g(s) + c_d X_d(s) \rightarrow X_d(s) = \frac{X(s)(ms^2 + c + c_d) - F_g(s)}{c_d}$$

$$X_d(s)(m_d s^2 + c_d) = c_d X(s) \rightarrow X_d(s) = \frac{c_d X(s)}{m_d s^2 + c_d}$$

A most már algebrai egyenletrendszert megoldjuk $X(s)$ -re, azaz mindkét egyenletből kifejezzük $X_d(s)$ -t és egyenlővé tesszük egymással:

$$X(s) = \frac{m_d s^2 + c_d}{(ms^2 + c + c_d)(m_d s^2 + c_d) - c_d^2} F_g(s)$$

A gépalapra értelmezhetjük az átviteli függvényt:

$$Y(s) = \frac{X(s)}{F_g(s)} = \frac{m_d s^2 + c_d}{(ms^2 + c + c_d)(m_d s^2 + c_d) - c_d^2}$$

Mivel a gerjesztés szinuszos, ezért az állandósult választ a frekvencia-átviteli függvénnyel egyszerűen megkaphatjuk:

$$Y(j\omega) = \frac{-m_d\omega^2 + c_d}{(-m\omega^2 + c + c_d)(-m_d\omega^2 + c_d) - c_d^2}$$

Az amplitúdó-nagyítási függvény a gerjesztés frekvenciáján:

$$A(\omega = 100) = \left| \frac{-2 \cdot 100^2 + 5 \cdot 10^3}{(-50 \cdot 100^2 + 10^4 + 5 \cdot 10^3)(-2 \cdot 100^2 + 5 \cdot 10^3) - (5 \cdot 10^3)^2} \right| \\ = 2,069 \cdot 10^{-6} \text{ m/N}$$

A gépalap rezgés-amplitúdója:

$$\hat{x} = A(\omega)\hat{F}_g = 2,069 \cdot 10^{-6} \cdot 50 = 1,0345 \cdot 10^{-4} \text{ m} = \underline{\underline{0,1 \text{ mm}}}$$

ad c)

A gépalap tökéletesen rezgésmentes, ha az amplitúdó-nagyítási függvény a gerjesztési frekvencián zérus. $Y(j\omega)$ számlálóját zérussal egyenlővé téve kapjuk, hogy

$$-m_d\omega^2 + c_d = 0 \rightarrow \underline{\underline{\frac{c_d}{m_d} = \omega^2}}$$

A kívánt feltétel teljesíthető, ha a dinamikus lengésfojtó $\alpha = \sqrt{c_d/m_d}$ sajátfrekvenciája éppen a gerjesztés frekvenciájával egyezik meg, amit c_d és m_d alkalmas megválasztásával érhetünk el. Jelen esetben például $c_d=5 \cdot 10^3$ N/m rugómerevség és $m_d=0,5$ kg tömeg esetén a gépalap rezgésmentes.

6. Bevezetés a numerikus analízisbe

Az állandó paraméterű, lineáris, elsőrendű differenciálegyenletekkel leírható rendszerekre az analitikus megoldás szinte mindig lehetséges, ahogy azt az eddigi vizsgálatainkban is tapasztalhattuk. Bonyolultabb, és főleg nem-lineáris problémák azonban ritkán oldhatók meg analitikusan. Ilyenkor a numerikus módszerek segítségével juthatunk eredményre.

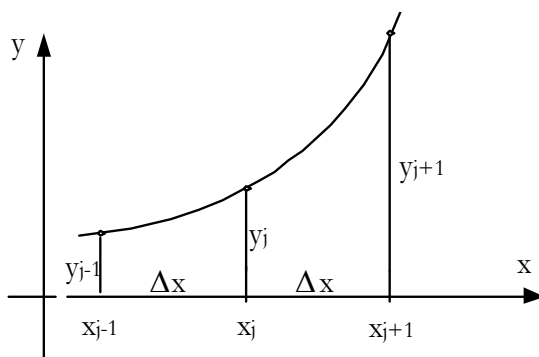
Meg kell említeni, hogy manapság számos nagyon hatékony kereskedelmi szoftver áll rendelkezésre (Maple, Matlab), melyekkel a laikusok is képesek meghatározni differenciálegyenletek numerikus megoldását. Mindazonáltal nem haszontalan betekintést nyerni ezen algoritmusok működésébe, mivel a digitális irányítású mechatronikai rendszerek fejlesztése során felmerülhet az igénye valós idejű vezérlő, illetve szabályzó algoritmusok megírásának.

6.1. Differenciálegyenletek közelítő megoldása

6.1.1. Differenciahányadosok származtatása

A differenciálegyenletek numerikus megoldására számtalan módszer létezik. Alapelvük azonban közös: a független változó értelmezési tartományát Δx hosszúságú, általában állandó hosszúságú (ekvidisztáns) intervallumokra osztják. Az intervallum kezdetén lévő értékekből határozzák meg az intervallum végén lévő értéket (un. prediktor eljárás), majd az egymást követő intervallumokban ezt az eljárást ismétlik. Igényesebb algoritmusok a számítás során az intervallum végén lévő értékeket is figyelembe veszik iteráció segítségével (prediktor-korrektor eljárások). A módszerek közös jellemzője, hogy a differenciálhányadost (a függvény adott pontbeli érintőjének meredekségét) a differencia-hányadossal (a húr meredekségével) közelítik. Az alapelv megértéséhez fel kell elevenítenünk a függvények *Taylor*-sorba fejtését.

Vizsgáljunk egy $y(x)$ függvényt az $y_i(x_i)$ pont környezetében. (Megjegyezzük, hogy a független változó nem csak távolság, hanem idő is lehet, ekkor értelemszerűen a deriválást idő szerint végezzük).



6.1. ábra

Először számítsuk ki a függvény értékét az x_j ponttól jobbra Δx távolságra lévő $x_{j+1}=x_j+\Delta x$ pontban!

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{1!} \left(\frac{dy}{dx} \right)_j \Delta x + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_j \Delta x^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3y}{dx^3} \right)_j \Delta x^3 + \dots \quad (6.1)$$

Az egyszerűbb írásmód érdekében a függvény i -dik differenciálhányadosának a j -dik osztáspontban való jelölésére vezessük be a

$$D_j^i = \left(\frac{d^i x}{dx^i} \right)_j$$

szimbólumot. Az új jelöléssel a (6.1) összefüggés a következőképpen írható:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{1!} D_j^1 \Delta x + \frac{1}{2!} D_j^2 \Delta x^2 + \frac{1}{3!} D_j^3 \Delta x^3 + \dots \quad (6.2)$$

A függvény differenciálhányadosa a j -dik osztáspontban (6.2)-ből kifejezve:

$$D_j^1 = \frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta x} - \left(\frac{1}{2!} D_j^2 \Delta x + \frac{1}{3!} D_j^3 \Delta x^2 + \dots \right) \quad (6.3)$$

A zárójelben lévő tagok Δx első hatványának nagyságrendjében vannak, amit $O[\Delta x]$ írásmóddal jelölünk (O =ordo).

$$D_j^1 = \frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta x} - O[\Delta x] \quad (6.4)$$

Egy függvény szelőjének meredekségét a függvény differenciáhányadosának nevezzük. A jobboldali differenciáhányados értéke:

$$\Delta_j^{1+} = \frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta x} \quad (6.5)$$

A differenciáhányados (a függvény érintőjének meredeksége) és a differenciáhányados (a függvény szelőjének meredeksége) közötti kapcsolat a következő:

$$D_j^1 = \Delta_j^{1+} + O(\Delta x) \quad (6.6)$$

Fejtsük *Taylor*-sorba az $y(x)$ függvényt $y_j(x_j)$ pont környezetében, de most balra haladva a $x_{j-1} = x_j - \Delta x$ pontban:

$$y_{j-1} = y_j - \frac{1}{1!} D_j^1 \Delta x + \frac{1}{2!} D_j^2 \Delta x^2 - \frac{1}{3!} D_j^3 \Delta x^3 + \dots \quad (6.7)$$

A függvény differenciáhányadosa a j -dik osztáspontban (6.7)-ből kifejezve:

$$D_j^1 = \frac{y_j - y_{j-1}}{\Delta x} + \left(\frac{1}{2!} D_j^2 \Delta x - \frac{1}{3!} D_j^3 \Delta x^2 + \dots \right) \quad (6.8)$$

A magasabb rendű deriváltakat elhanyagolva a közelítés hibája most is $O[\Delta x]$.

$$D_j^1 = \Delta_j^{1-} + O[\Delta x] \quad (6.9)$$

Vonjuk ki a (6.2)-ből a (6.7) összefüggést:

$$y_{j+1} - y_{j-1} = 2D_j^1 \Delta x + \left(2 \frac{1}{3!} D_j^3 \Delta x^3 + \dots \right) \quad (6.10)$$

Fejazzük ki innen az első differenciáhányadost:

$$D_j^1 = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2\Delta x} - \left(\frac{1}{3!} D_j^3 \Delta x^2 + \dots\right) \quad (6.11)$$

Jól láthatóan a zárójel elhagyásával elkövetett hiba jóval kisebb, mert a hiba a lépésköz második hatványával arányos:

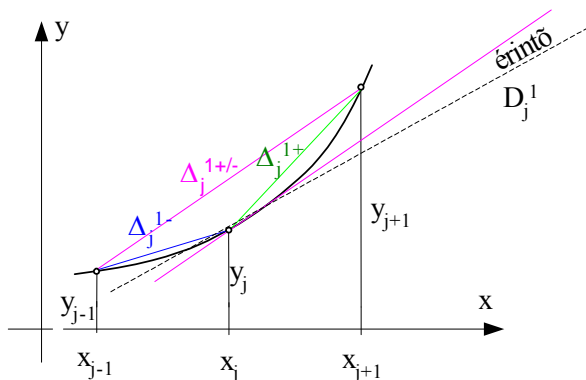
$$D_j^1 = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2\Delta x} - O[\Delta x^2] \quad (6.12)$$

Egy adott pontbeli differenciálhányadost a két oldalról számított

$$\Delta_j^{1\pm} = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2\Delta x} \quad (6.13)$$

differenciáhányados jobban közelít, mint a Δ_j^{1+} és a Δ_j^{1-} .

A kapott eredmények a 6.2. ábrán láthatók. A j-dik osztáspontban a függvény közelítő érintői közül a kék színű baloldali húr és zöld színű jobb oldali húr erősen eltér a tényleges, szaggatott vonallal jelölt érintőtől. A lila színű kétoldali közelítés ellenben láthatóan sokkal jobb eredményt ad.



6.2. ábra

A *második derivált* és a második differenciáhányados kapcsolatának ki-derítése érdekében most adjuk össze (6.2) és (6.7) összefüggéseket:

$$y_{j+1} + y_{j-1} = 2y_j + \frac{2}{2!} D_j^2 \Delta x^2 + \frac{2}{4!} D_j^4 \Delta x^4 + \dots \quad (6.14)$$

A második deriváltat kifejezve (6.14)-ből:

$$D_j^2 = \frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{\Delta x^2} - \left(\frac{1}{12} D_j^4 \Delta x^2 + \dots\right) \quad (6.15)$$

A második differenciálhányadost $O[\Delta x^2]$ hibával közelítő második differenciálhányados a

$$\Delta_j^2 = \frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{\Delta x^2} \quad (6.16)$$

összefüggéssel számítható.

6.1.2. Euler-Cauchy (törtvonal) módszer

Adott az

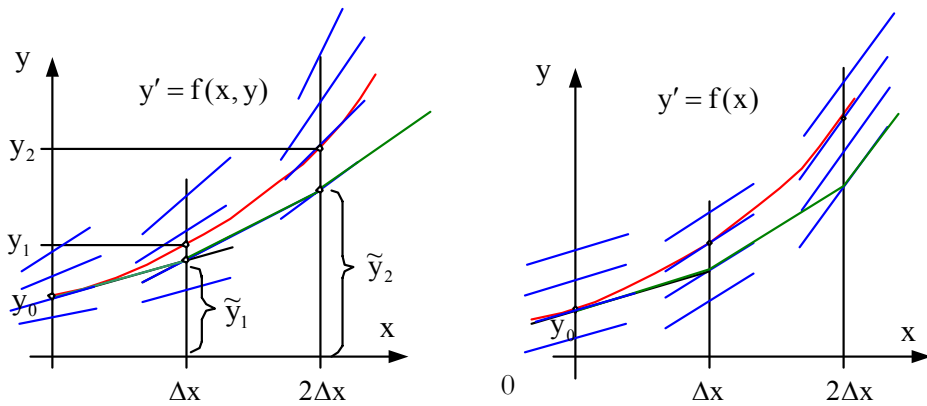
$$y' = f(x, y) \quad (6.17)$$

függvénykapcsolattal leírt elsőrendű differenciálegyenlet $y(x_0) = y_0$ előírt kezdeti feltétellel. Keresett a kezdetiérték-feladat $y(x)$ megoldásának közelítő $\tilde{y}(x)$ megoldásfüggvénye.

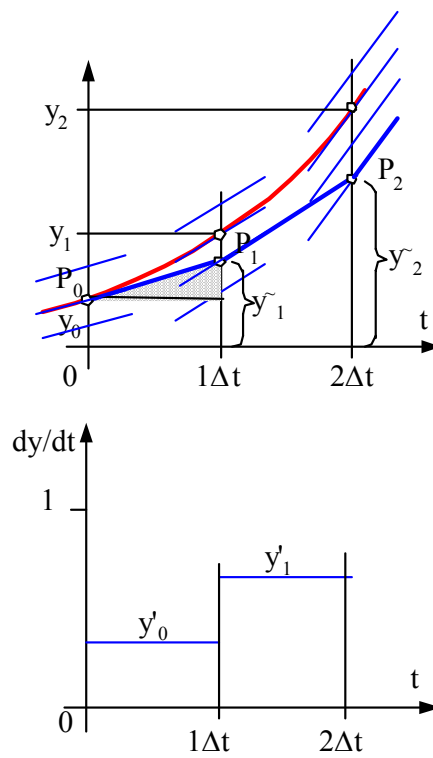
Egyszerűbben szólva, ismerjük a keresett függvény meredekségét bármely pontban (kék egyenes-sereg), mint x és y függvényét és keressük azt az integrálgörbét, mely áthalad a kezdeti értéknek megfelelő $y(x_0) = y_0$ ponton (6.3.a ábra). Egyszerűbb a feladat, mikor a függvény deriváltja csak a független változó függvénye, mert ekkor a függvény érintői adott x értéknél párhuzamos egyenes-sereget alkotnak (6.3.b ábra)

A könnyebb érthetőség érdekében először tételezzük fel, hogy a független változó az idő, a keresett függvény deriváltja pedig csak a független változó függvénye:

$$\dot{y} = f(t) \quad (6.18)$$



6.3. ábra



6.4. ábra

A probléma geometriai szemléltetése a 6.4. ábrán látható: az osztáspontokban ismert a keresett függvény deriváltja (érintőjének meredeksége), amit most párhuzamos kék vonalsereggel ábrázolhatunk.

Az *Euler-Cauchy* módszer a keresett függvényt egyenes szakaszokból összeillesztett törtvonallal közelíti, miközben a függvény deriváltját az intervallumon belül állandónak tételezi fel.

A törtvonal $\overline{P_{j-1}P_j}$ szakaszának meredeksége (6.8) szerint

$$\frac{y_j - y_{j-1}}{\Delta t} \approx f(t_{j-1}) \quad (6.19)$$

számítható, ahol az $f(t_{j-1})$ derivált az intervallum bal oldali végpontjában ismert. Átrendezéssel a j -dik pontban a függvényérték

$$y_j = y_{j-1} + f(t_{j-1}) \cdot \Delta t \quad , \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (6.20)$$

lesz. Az eljárást hasonló módon folytatva tetszőleges ideig meghatározhatjuk a keresett függvényértékeket.

Csak kis Δt időintervallumok esetén számíthatunk elfogadható pontosságra. Hosszabb folyamat vizsgálatakor az egyes lépéseknél elkövetett hibák halmozódnak, az eredmény megbízhatatlanná válik.

6.1. Példa.

Határozzuk meg az $\dot{y} = 3t^2$ differenciálegyenlettel leírt folyamat megoldásfüggvényének egzakt, valamint numerikus közelítő módszerrel kapott megoldását, ha $t=0$ időpillanatban $y_0=0$.

Megoldás

A differenciálegyenlet analitikusan is megoldható, így a numerikus megoldás eredményét összehasonlíthatjuk az elméletileg helyes megoldással.

Az *analitikus* megoldás

$$y = y_0 + \int_0^t 3t^2 dt = t^3$$

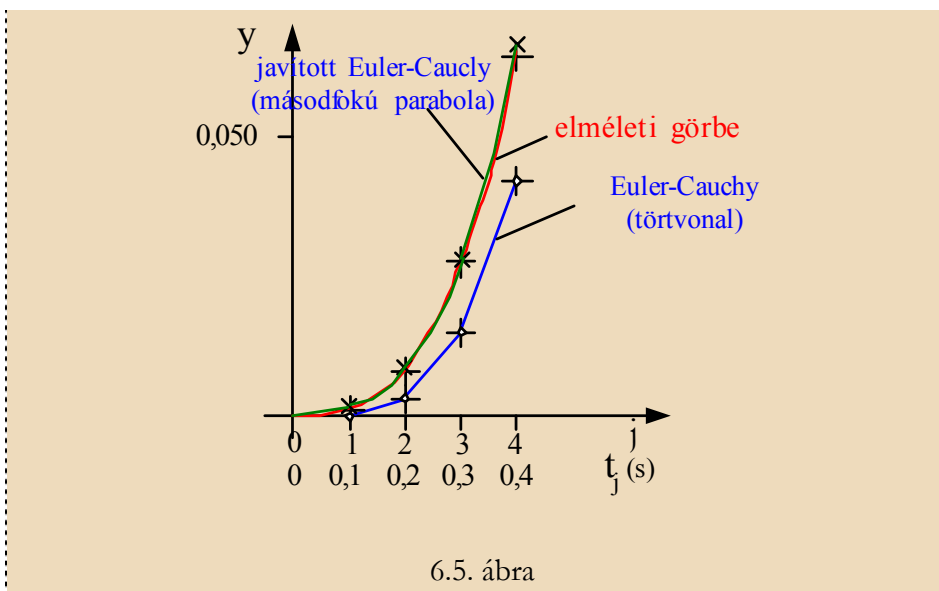
A *numerikus* eljárásban szándékosan nagy, $\Delta t=0,1$ s idő lépésközt választottunk, hogy a két megoldás eltérésére rávilágítsunk. A numerikus eljárás algoritmus (6.20) szerint

$$y_j = y_{j-1} + 3t_{j-1}^2 \Delta t$$

A számítást táblázatos formában öt intervallum hosszig végeztük. Az egyes intervallumok végén felvett függvényértékek megegyeznek a következő intervallum kezdőértékeivel, amit a cellák azonos színe is jelez.

J	t_j	t_{j-1}	y_{j-1}	+	$3t_{j-1}^2 \Delta t$	y_j	$y = t^3$
0	0	-	-	+	-	0 (kezd.f)	0
1	0,1	0	0	+	$3 \cdot 0^2 \cdot 0,1$	0	0,001
2	0,2	0,1	0	+	$3 \cdot 0,1^2 \cdot 0,1$	0,003	0,008
3	0,3	0,2	0,003	+	$3 \cdot 0,2^2 \cdot 0,1$	0,015	0,027
4	0,4	0,3	0,015	+	$3 \cdot 0,3^2 \cdot 0,1$	0,042	0,064
5	0,5	0,4	0,042	+	$3 \cdot 0,4^2 \cdot 0,1$	0,090	0,125

A számítás eredményeit a 6.5. ábrán ábrázoltuk. Látható, hogy a törtvonalal való közelítés hibája a választott lépésközzel nagy.



6.1.3. Javított Euler-Cauchy módszer $y'=f(x)$ típusú differenciálegyenlet megoldására

Változatlanul az $\dot{y} = f(t) = 3t^2$ differenciálegyenletet numerikus megoldását keressük, azonban az $y(t)$ függvényt most nem törtvonallal, hanem az osztáspontok között másodfokú polinomokkal közelítjük. A $j-1$ -dik és a j -dik osztáspontok közötti időt a szakasz kezdetén kezdjük mérni, így a $0 \leq t \leq \Delta t$ szakaszban a közelítő polinom egyenlete

$$y = at^2 + bt + c \tag{6.21}$$

alakú, ahol az a , b , és c együtthatók egyelőre ismeretlenek. A polinom deriváltja

$$\dot{y} = 2at + b \tag{6.22}$$

alakú, vagyis most már nem állandó az intervallumon belül, hanem lineárisan változó (6.6. ábra alsó kék egyenese). Az ismeretlen együtthatókat a peremfeltételekből határozhatjuk meg: a $[j-1, j]$ szakasz kezdetén ismerjük a görbe y_{j-1} kezdeti értékét (mint kezdeti feltételt, vagy már kiszámított értéket), amiből a „ c ” együttható meghatározható:

$$y_{j-1} = a0^2 + b0 + c \rightarrow c = y_{j-1} \quad (6.23)$$

Tudjuk továbbá, hogy a szakasz kezdetén a keresett függvény deriváltja a differenciálegyenletből ismert, innen a „b” együtthatót tudjuk meghatározni:

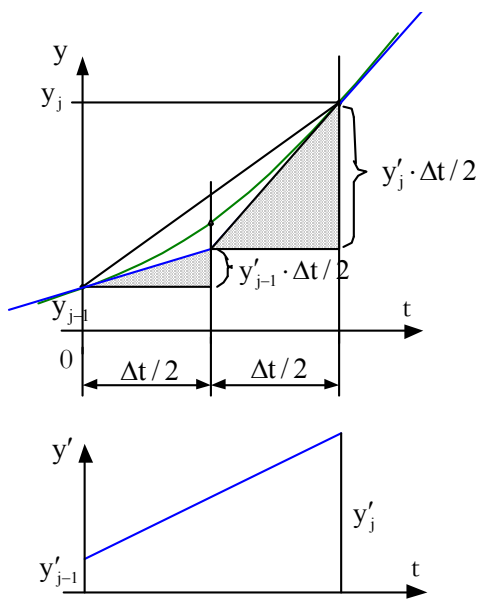
$$\dot{y}_{j-1} = 2a0 + b \rightarrow b = \dot{y}_{j-1} \quad (6.24)$$

Az ismeretlen „a” együtthatót pedig a szakasz végén lévő derivált felírásából kapjuk:

$$\dot{y}_j = 2a\Delta t + b = 2a\Delta t + \dot{y}_{j-1} \quad (6.25)$$

Innen az „a” együttható kifejezhető:

$$a = \frac{\dot{y}_j - \dot{y}_{j-1}}{2\Delta t} \quad (6.26)$$



6.6. ábra

Visszahelyettesítve a másodfokú polinom együtthatóit, a szakasz jobboldali végpontjában a függvényérték:

$$y_j = \underbrace{\frac{\dot{y}_j - \dot{y}_{j-1}}{2\Delta t}}_a \Delta t^2 + \underbrace{\dot{y}_{j-1}}_b \Delta t + \underbrace{y_{j-1}}_c \quad (6.27)$$

lesz, ami egyszerűsítés és átrendezés után egyszerűbb alakban is felírható:

$$y_j = y_{j-1} + \dot{y}_{j-1} \frac{\Delta t}{2} + \dot{y}_j \frac{\Delta t}{2} \quad (6.28)$$

Felismerhetjük (6.28)-ból a másodfokú parabola szerkesztési szabályát, amit a tartók nyomatóéki ábrájának szerkesztésekor már használtunk (a parabola végpontokban rajzolt érintői a szakasz felénél metszik egymást). Az intervallumban másodfokú parabolával közelített függvénygörbe vonalvastagságon belül tér el az analitikus megoldástól (6.5.ábra). A step-by-step számítás a táblázat alapján egyszerűen nyomon követhető. Megállapíthatjuk, hogy a javított Euler-Cachy módszer lényegesen pontosabb eredményt szolgáltat.

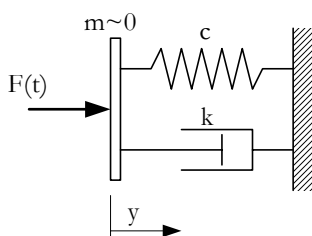
J	t _j	t _{j-1}	y _{j-1}	+ 3t _{j-1} ² Δt/2	+ 3t _j ² Δt/2	y _j	y = t ³ (elm)
0	0	-	-	+ -	+ 3·0 ² ·0,05	0 (k.f)	0
1	0,1	0	0	+ 3·0 ² ·0,05	+ 3·0,1 ² ·0,05	0,0015	0,001
2	0,2	0,1	0,0015	+ 3·0,1 ² ·0,05	+ 3·0,2 ² ·0,05	0,0090	0,008
3	0,3	0,2	0,0090	+ 3·0,2 ² ·0,05	+ 3·0,3 ² ·0,05	0,0285	0,027
4	0,4	0,3	0,0285	+ 3·0,3 ² ·0,05	+ 3·0,4 ² ·0,05	0,066	0,064
5	0,5	0,4	0,064	+ 3·0,4 ² ·0,05	+ 3·0,5 ² ·0,05	0,1275	0,125

6.1.4. Runge-Kutta 4 módszer

Az egyik leggyakrabban alkalmazott numerikus módszer az $y' = f(x, y)$ alakú elsőrendű, $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételű differenciálegyenlet megoldására.

A könnyebb érthetőség érdekében konkrét feladaton mutatjuk be a módszert. Származtassuk a megoldandó differenciálegyenletet a következő problémából.

Egy $c=5000\text{N/m}$ merevségű ideális rugóval és $k=100\text{Ns/m}$ tényezőjű sebességarányos csillapítóval modellezhető gumirugóra $F(t)=10000t$ [N] időben egyenletesen növekvő gerjesztőerő hat. A gumirugó kezdeti összenyomódása zérus. Célunk a rugó $x(t)$ összenyomódásának a meghatározása (6.7. ábra).



6.7. ábra

Newton II. axiómáját elhanyagolható tömegű lapra felírva

$$F(t) - cy - k\dot{y} = m\ddot{y} = 0,$$

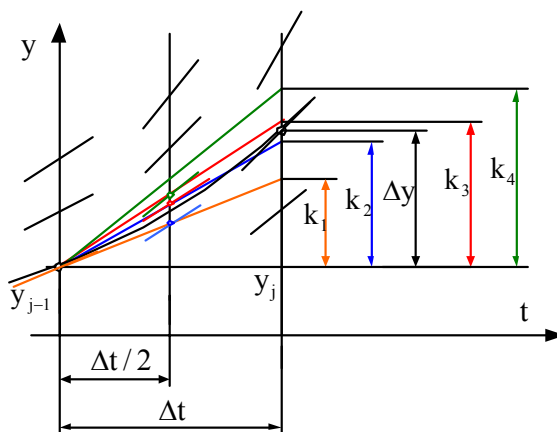
ahonnan rendezés és a számértékek behelyettesítése után a

$$\frac{dy}{dt} = -50y + 100t, \quad y_0 = 0 \tag{6.29}$$

differenciálegyenletet nyerjük. A feladatban alkalmazott jelöléseinkkel a megoldandó differenciálegyenlet

$$\dot{y} = f(y, t), \quad \text{ahol } f(y, t) = -50y + 100t \tag{6.30}$$

A Runge-Kutta-4 módszer egy tetszőleges Δt hosszúságú időintervallum végén lévő függvényérték kiszámításához négy korrekciós tagot vesz figyelembe (innen származik a RK-4 elnevezés). (6.8. ábra)



6.8. ábra

A korrekciós tényezők jelentése a következő:

- k_1 : ekkora utat tenne meg a test, ha a *szakasz kezdetén* lévő v_0 sebességgel (mint állandó sebességgel) mozogna az egész intervallum alatt
- k_2 : az előző becslésben kiszámított k_1 *út felénél* (ami az időintervallum felét is jelenti) kiszámított v_1 sebességgel mozogna az egész intervallumban [kék egyenes]
- k_3 : az előző becslésben kiszámított k_2 *út felénél* (ami az időintervallum felét is jelenti) kiszámított v_2 sebességgel mozogna az egész intervallumban [piros egyenes]
- k_4 : az előző becslésben kiszámított k_3 *út végénél* és az időintervallum végénél kiszámított v_3 sebességgel mozogna az egész intervallumban [zöld egyenes]

A korrekciós tagok (6.31-6.34) számítási összefüggéseit az alábbiakban levezetés nélkül megadjuk és az első, $[0, \Delta t]$ intervallum esetében a korrekciós tagok számértékét is meghatározzuk $\Delta t=0,01s$ lépésközre. A korrekciós tagok rendre:

$$k_1 = \Delta t \cdot f(t_0, y_0) \tag{6.31}$$

$$\rightarrow k_1 = 0,01 \cdot [100 \cdot 0 - 50 \cdot 0] = \underline{\underline{0}}$$

$$k_2 = \Delta t \cdot f\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) \quad (6.32)$$

$$\rightarrow k_2 = 0,01 \cdot \left[100\left(0 + \frac{0,01}{2}\right) - 50\left(0 + \frac{0}{2}\right)\right] = \underline{\underline{0,005}}$$

$$k_3 = \Delta t \cdot f\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) \quad (6.33)$$

$$\rightarrow k_3 = 0,01 \cdot \left[100\left(0 + \frac{0,01}{2}\right) - 50\left(0 + \frac{0,005}{2}\right)\right] = \underline{\underline{0,00375}}$$

$$k_4 = \Delta t \cdot f(t_0 + \Delta t, y_0 + k_3) \quad (6.34)$$

$$\rightarrow k_4 = 0,01 \cdot [100(0 + 0,01) - 50(0 + 0,00375)] = \underline{\underline{0,008125}}$$

A függvény növekménye az intervallumban a korrekciós tagok súlyozott számtani átlagaként számítható:

$$\Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (6.35)$$

$$\rightarrow \Delta y = \frac{1}{6}(0 + 2 \cdot 0,005 + 2 \cdot 0,00375 + 0,008125) = \underline{\underline{0,004270}}$$

Az intervallum végén lévő függvényérték tehát

$$y = y_0 + \Delta y = 0,004270 \text{ m}$$

Érdekesség kedvéért közöljük az analitikus megoldást, mely

$$y = 0,04(e^{-50t} - 1) + 2t,$$

alakú és $t=0,01$ -nél $y=0,004261$ m elmozdulást ad. A relatív hiba mindössze 0.2%, mely érték tovább csökkenthető a lépésköz kisebbre választásával. Az eljárást a további intervallumokban hasonló módon folytatjuk. Bár a módszer időigénye a korrekciós tagok számítása miatt nagyobb, azonban a hiba a lépésköz ötödik hatványával arányos. Azonos lépésköz

esetén a *Runge-Kutta-4* módszer összehasonlíthatatlanul pontosabb eredményt szolgáltat, mint a törtvonal-módszer.

6.1.5. Magasabb rendű differenciálegyenletek közelítő megoldása

Itt csak másodrendű differenciálegyenlet numerikus megoldásával foglalkozunk. Célunk olyan rekurzív algoritmus létrehozása, mely az előző lépésekben kiszámított függvényértékekből és az új bemenőjel értékből határozza meg a soron következő függvényértéket. A megoldás alapelve, hogy az első és másodrendű differenciálhányadosokat helyettesítjük a (6.13) és (6.16) differenciahányadosokkal. Az eljárást az 5.7. Példa nyomán ismeretjük.

A rendszer (5.1)

$$Y(s) = \frac{U(s)}{U_b(s)} = \frac{sL}{s^2RLC + sL + R}$$

átviteli függvényét keresztbeszorzás után visszaalakítjuk differenciálegyenletté:

$$RLC \frac{d^2u}{dt^2} + L \frac{du}{dt} + Ru = L \frac{du_b}{dt} \quad (6.36)$$

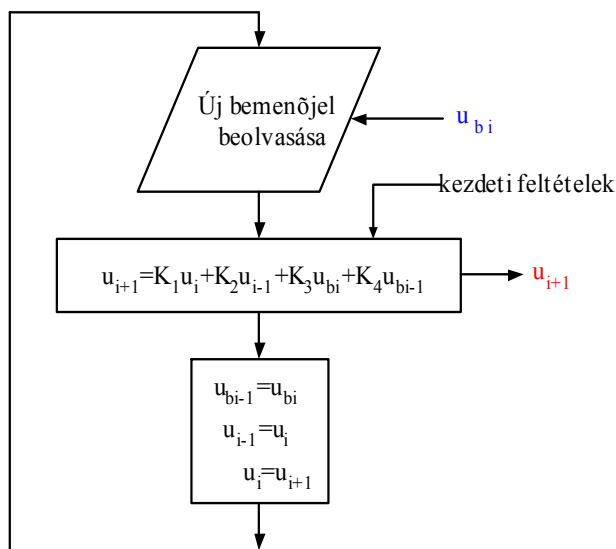
Ezt követően a differenciálhányadosokat helyettesítjük a (6.8), (6.13), (6.16) differenciahányadosokkal:

$$RLC \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{\Delta t^2} + L \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta t} + Ru_j = L \frac{u_{bj+1} - u_{bj-1}}{2\Delta t} \quad (6.37)$$

Az u_{j+1} kiemelése és elemi átalakítások után kapott rekurziós formula a következő:

$$u_{i+1} = -\frac{-4RLC + 2R\Delta t^2}{2RLC + L\Delta t} u_i - \frac{2RLC - L\Delta t}{2RLC + L\Delta t} u_{i-1} + \frac{2L\Delta t}{2RLC + L\Delta t} u_{bi} - \frac{2L\Delta t}{2RLC + L\Delta t} u_{bi-1} \quad (6.38)$$

A kimenőjel együtthatóit K_1, K_2, K_3, K_4 -gyel jelölve, a rekurzív algoritmus blokkdiagramja a következő (6.9. ábra):



6.9. ábra

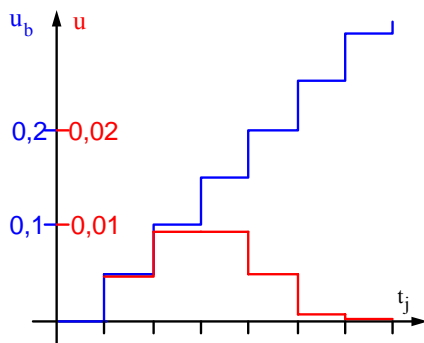
A numerikus számítás tekinthető egy mintavételes rendszer algoritmusának is. Az u_{bi} bemenő jel Δt mintavételi ideig állandónak tekinthető (nulladrendű tartótag). A (6.38) algoritmus az előző u_i és az azt megelőző u_{i-1} kimenőjel értékek, valamint az új u_{bi} és a megelőző u_{bi-1} bemenőjel értékek segítségével kiszámítja az új u_{i+1} kimenőjel értéket. A következő mintavételi periódusban ez az „új” érték számít a „rég” értéknek, ezért minden változót időben egy osztással el kell tolni (shiftelés).

Az eljárást $\omega=50$ 1/s körfrekvenciájú, $\Delta t=0,001$ s mintavételi idővel mintavételezett $u_{bi}=\sin(50*i*0,001)$ bemenő jelre mutatjuk be zérus kezdeti feltételekkel (táblázat első oszlopa).

A (6.38) algoritmus együtthatói $R=10^3 \Omega$, $L=0,1$ H, $C=10^{-5}$ F értékekkel a következők: $K_1=0,9523$, $K_2=-0,9047$, $K_3=0,0952$, $K_4=-0,0952$.

I	U_{bi}	U_{bi-1}	U_{i-1}	U_i	U_{i+1}
1	→ 0,0499	0	0	0	0,0047 →
2	→ 0,0998	0,0499	0	0,0047	0,0092 →
3	→ 0,1494	0,0998	0,0047	0,0092	0,0092 →
4	→ 0,1986	0,1494	0,0092	0,0092	0,0051 →
5	→ 0,2474	0,1986	0,0092	0,0051	0,0011 →
6	→ 0,2955	0,2474	0,0051	0,0011	0,0010 →

A bemenet és kimenet első hat értékét a 6.10. ábrán láthatjuk.



6.10. ábra

A magasabb rendű differenciálegyenletek numerikus megoldásának számos egyéb módszere létezik. A megoldások azon alapulnak, hogy egy n-ed rendű differenciálegyenlet új változók bevezetésével visszavezethető n darab elsőrendű differenciálegyenletre. Az elsőrendű differenciálegyenletek rendszere pedig az ismertetett módszerek valamelyikével már megoldható.

6.2. Interpoláció jellegzőgörbék megadására

A műszaki számításokban gyakran válik szükségessé egy mérésel felvett görbe közelítő egyenletének meghatározása. A probléma hasonló a regresszió-számításhoz, de míg ott a közelítő görbe (többnyire egyenes) nem feltétlenül halad át a mérési pontokon, addig interpolációnál a közelítő görbe áthalad az előre meghatározott alappontokon. A közelítő görbét célszerűségi okokból hatványfüggvénynek választjuk és interpolációs polinomnak nevezzük. Bár napjainkban hatékony eljárások is rendelkezésre állnak (pl. spline-függvények alkalmazásával), a továbbiakban csupán egy klasszikus módszerrel, a *Lagrange*-féle interpolációs polinom alkalmazásával foglalkozunk.

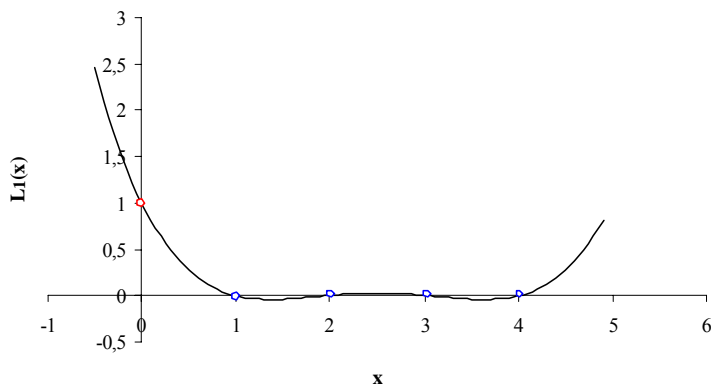
Az alapprobléma a következő: adott n darab összetartozó (x_i, y_i) értékpár. Olyan $n-1$ -ed fokú polinomot kell konstruálnunk, mely áthalad az összes $P_i(x_i, y_i)$, $i=1, 2, 3, \dots, n$ ponton. A függvényt n darab $n-1$ -ed fokú függvény (alappolinom) lineáris kombinációjaként állítjuk elő:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n y_i L_i(x) \quad (6.39)$$

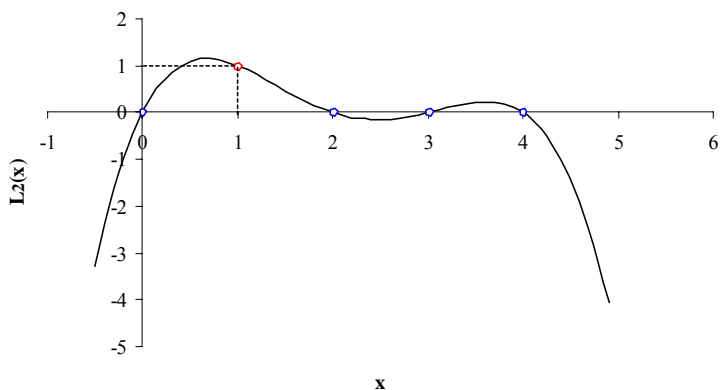
Az $L_i(x)$ alappolinomok közös tulajdonsága, hogy az x_i helyen 1 értéket vesznek fel, az összes többi x_j , $j \neq i$ helyen zérus értékűek. Például a negyedfokú $L_1(x)$ alappolinom értéke az $x=x_1$ helyen $L_1(x_1)=1$, minden más alappontban zérus: $L_1(x_2)=L_1(x_3)=L_1(x_4)=L_1(x_5)=0$. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)} \quad (6.40)$$

alappolinom ilyen tulajdonságú, mivel ha $x=x_2$, vagy $x=x_3$, vagy $x=x_4$, vagy $x=x_5$, akkor a számláló valamelyik tényezője zérus, következésképpen $L_1(x)$ is zérus. Ugyanakkor, ha $x=x_1$, akkor a számláló és a nevező megegyezik, tehát $L_1(x_1)=1$. Az $L_1(x)$ és $L_2(x)$ alappolinom képe a (6.11. és 6.12. ábrákon látható $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$, és $x_5=4$ értékekre.



6.11. ábra $L_1(x)$ alappolinom



6.12. ábra. $L_2(x)$ alappolinom

6.2. Példa

Egy motor jelleggörbéjét szeretnénk analitikusan megadni. A jelleggörbe nevezetes pontjait a táblázat tartalmazza.

i	n/1000 (ford/min)	M (Nm)
1	0	300
2	1	310
3	2	370
4	3	400
5	4	0

Megoldás

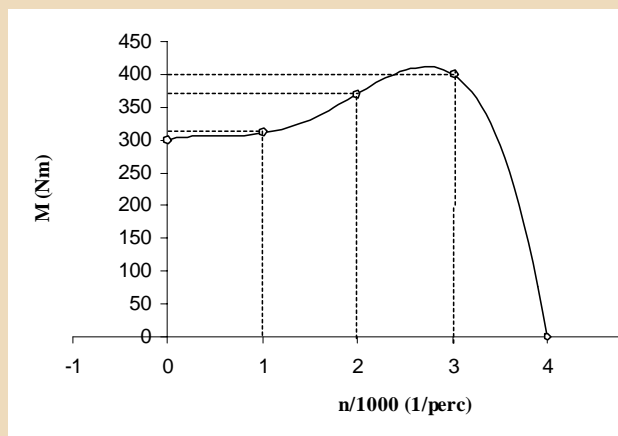
A Lagrange-féle interpolációs polinomokat a megfelelő jelölésekkel

$$L_i(n) = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^5 (n - n_j)}{\prod_{i=1, j \neq i}^5 (n_i - n_j)}$$

összefüggés szerint képezve a görbe analitikus egyenlete a következő:

$$M(n) = \sum_{i=1}^5 M_i L_i(n) = 300L_1(n) + 310L_2(n) + 370L_3(n) + 400L_4(n)$$

A kapott görbe a 6.11. ábrán látható.



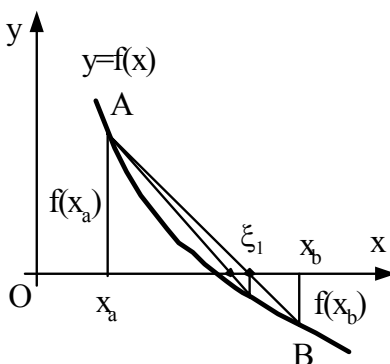
6.13. ábra

6.3. Gyökkereső módszerek

Számos esetben válik szükségessé az $f(x)=0$ algebrai egyenlet gyökének (gyökeinek) meghatározása. Különösen transzcendens egyenleteknél a gyök algebrai módszerekkel nem határozható meg. Ilyenkor numerikus módszerekkel célt érhetünk. A következőkben a gyökközelítő módszerek közül a húr- és az érintő módszer, valamint az iteráció alapgondolatával ismerkedünk meg. A módszerek elemi programozási ismeretekkel automatizálhatók

6.3.1. Húrmódszer

Legyen adott az $f(x)$ folytonos függvény. Az $f(x)=0$ egyenlet (egyik) gyöke nyilvánvalóan olyan x_a és x_b abszcisszájú pontok között található, melyekre a két függvényérték ellenkező előjelű, vagyis $f(x_a) \cdot f(x_b) < 0$.

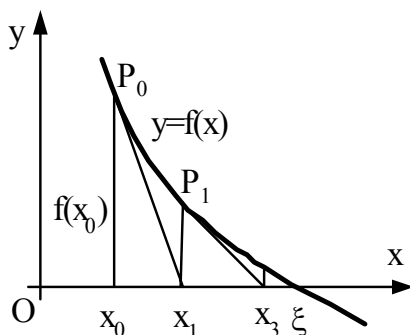


6.14. ábra

Az x tengely mentén durva lépésekkel végighaladva keresünk ilyen tulajdonságú A és B pontot. A két pontot összekötő húr és az x tengely ξ_1 metszéspontja a keresett gyök első közelítése. (A húr egyenletének felírása a középiskolából jól ismert „két ponton átmenő egyenes egyenlete” alapján történik). A módszert ezután megismételjük: az új húr egyik végpontja a ξ_1 abszcisszájú pont, a másik végpontja az x_a vagy x_b abszcisszájú pont lesz attól függően, hogy melyikük előjele ellentétes $f(\xi_1)$ -gyel. Az eljárást addig ismételjük, míg a gyököt kellően meg nem közelítettük.

6.3.2. Érintő módszer

A módszert differenciálható függvényekre alkalmazhatjuk. Egy P_0 pontból elindulva felírjuk a függvény érintőjének egyenletét („egy ponton átmenő, adott meredekségű egyenes egyenlete”), majd meghatározzuk az érintő és az x -tengely x_1 metszéspontját. Az x_1 abszcisszájú P_1 pontban az eljárást megismételjük és addig folytatjuk, míg a gyököt kellően meg nem közelítettük.



6.15. ábra

6.3. Példa. Oldjuk meg numerikusan a

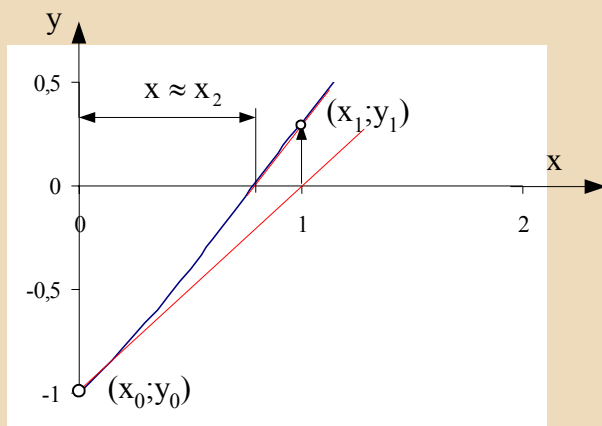
$$\sin x = \cos x$$

egyenletet érintő módszerrel.

Megoldás.

Az egyenletet átírjuk $y(x) = \sin x - \cos x$ alakra és ez utóbbi egyenletnek keressük a zérushelyét. Induljunk ki a kék színnel rajzolt $y(x)$ függvény $x_0=0$, $y_0=-1$ pontjából. A függvény érintőjének meredeksége ebben a pontban

$$y'(x_0) = \cos(x_0) + \sin(x_0) = 1$$



6.16. ábra

Az érintő egyenes egyenlete a középiskolában tanultak szerint $y - y_0 = y'_0(x - x_0)$, ami a konkrét adatokkal

$$y + 1 = 1(x - 0).$$

A pirossal rajzolt érintő egyenes az x tengelyt ($y=0$) az $x_1=1$ helyen metszi (ez a feladat megoldásának első közelítése). Ehhez az abszcisszához tartozó függvényérték

$$y_1 = \sin(1) - \cos(1) = 0,2984$$

és érintő meredekség

$$y'_1 = \cos(1) + \sin(1) = 1,3817$$

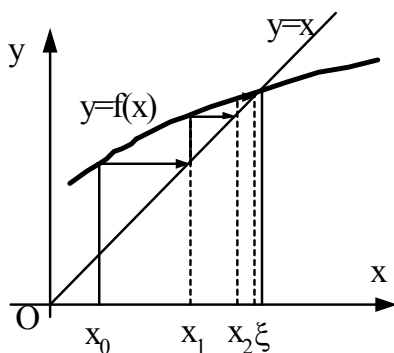
A függvény $(1; 0,2984)$ pontjába húzott érintő egyenlete

$$y - 0,2984 = 1,3817(x - 1)$$

Az érintő és az x tengely metszéspontja $x_2=0,7836$. Ez az érték már alig különbözik az analitikusan kapott helyes megoldástól ($x=0,7853$). Az eljárás láthatóan nagyon gyorsan konvergál, jelen esetben már két lépés után elfogadható pontosságú megoldást szolgáltat.

6.3.3. Iteráció

Gyakran alkalmazott módszer $f(x)-x=0$ alakú egyenletek megoldására. Először az eredeti egyenletet $x=f(x)$ alakra hozzuk. A szemléletesség kedvéért az egyenlet két oldalát külön ábrázoljuk.



6.17. ábra

Az x_0 abszcisszával kezdve, az egymást követő közelítések az ábrán jól követhetők:

$$x_1 = f(x_0)$$

$$x_2 = f(x_1)$$

$$x_3 = f(x_2)$$

....

A módszer által kapott x_1, x_2, x_3, \dots sorozat akkor konvergál az egyenlet ξ gyökéhez, ha az $|f'(x)| < 1$ feltétel teljesül a gyök környezetében.

7. Hajtástechnika

7.1. Hajtásláncok elemeinek redukciója

A hajtott berendezést általában több, különböző sebességgel mozgó tömeg alkotja, melyekre különböző erők és nyomatékok hatnak. A hajtásláncok vizsgálatát nagyban egyszerűsíti, ha a mozgó tömegeket és terheléseket a motor tengelyére átszámított (redukált) eredőjükkel helyettesítjük. Megjegyzendő azonban, hogy **a helyettesítés csak merev, holtjáték nélküli elemekre alkalmazható**. Ellenkező esetben nem kerülhetjük el a rugalmas hatásokat is figyelembe vevő sokkal bonyolultabb többtest- vagy kontinuum-modellek alkalmazását. A továbbiakban a tehetetlenségi hatások és terhelések motor tengelyére való redukálásával foglalkozunk.

7.1.1. Mozgó tömegek redukálása a hajtó tengelyre

Gyakori eset, hogy egy forgó mozgást végző motorral olyan gépet hajtunk meg, melyben több, különböző sebességgel forgó és haladó tömeg található. Célszerű ilyenkor a hajtott gépet egy olyan forgó tömeggel („egyenértékű lendkerékkel”) helyettesíteni, mely gyorsításához, illetve fékezéséhez ugyanakkora nyomaték illetve energia szükséges, mint az egész berendezés mozgásállapotának megváltoztatásához. Az egyenértékű „lendkerék” tehetetlenségi nyomatékát J_{red} **redukált tehetetlenségi nyomatéknak** nevezünk. A tehetetlenségi hatásoknak természetesen csak mozgásállapot változáskor (gyorsulás, lassulás) van szerepük.

A redukálás alapelve az, hogy a helyettesítő „lendkerék” mozgási energiája bármely pillanatban azonos legyen a gép mozgó tömegeinek eredő mozgási energiájával.

A helyettesítő lendkerék forgó mozgást végez a motor szögsebességével, tehát mozgási energiája:

$$E = \frac{J_{\text{red}} \omega_m^2}{2} \quad (7.1)$$

A gép „p” számú haladó és „q” számú forgó mozgást végző tömegének összes mozgási energiája:

$$E = \sum_{i=1}^p \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{J_j \omega_j^2}{2} \quad (7.2)$$

(Az összetett, pl. csavarmozgást végző test eredő mozgási energiája a szuperpozíció elve szerint haladó és forgómozgás energiájának összegeként számítható). A mozgási energiák egyenlőségéből a helyettesítő lendkerék redukált tehetetlenségi nyomatéka a következő lesz:

$$J_{\text{red}} = \sum_{i=1}^p m_i \left(\frac{v_i}{\omega_m}\right)^2 + \sum_{j=p+1}^q J_j \left(\frac{\omega_j}{\omega_m}\right)^2 \quad (7.3)$$

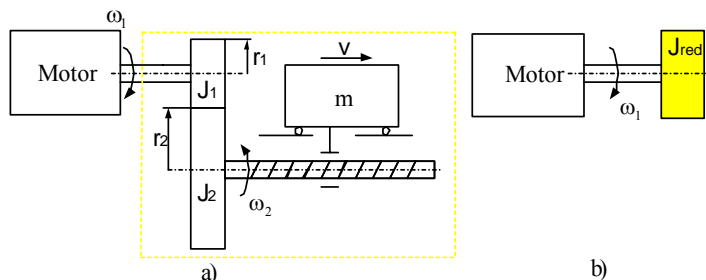
A zárójelekben az egyes haladó, illetve forgó mozgást végző testek sebességének (szögsebességének) és a hajtó motor szögsebességének a viszonya (az áttétel reciproka) szerepel, melyekkel a redukált tehetetlenségi nyomaték értéke egyszerűen számítható.

$$J_{\text{red}} = \sum_{i=1}^p \frac{m_i}{i_i^2} + \sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{J_j}{j_j^2} \quad (7.4)$$

Megjegyzés: az „i” indexű forgó-haladó mozgások között értelmezett áttételek (1/m) dimenziójúak, míg a „j” indexű forgó-forgó mozgás között értelmezett áttételek dimenziómentesek.

7.1 Példa

A motor $r_1=0,05$ m sugarú, $J_1=0,005$ kgm² forgástengelyre számított tehetetlenségi nyomatékú fogaskerékkel hajtja meg az $r_2=0,1$ m sugarú, $J_2=0,12$ kgm² tehetetlenségi nyomatékú fogaskereket, mely egybe van építve a $b=0,05$ m menetemelkedésű golyósorsóval. Az orsó egy $m=200$ kg tömegű asztalt mozgat (7.1. ábra).



7.1. ábra

Határozzuk meg a hajtott gép tehetetlenségi hatásait modellező, a motor szögsebességével forgó tárcsa redukált tehetetlenségi nyomatékát!

Megoldás: A J_1 tehetetlenségi nyomatékú fogaskerék a motor tengelyére van rögzítve, ezért áttétele a motorhoz képest $i_1=1$. A J_2 fogaskerék ω_2 szögsebességgel forog, ezért áttétele $i_2=(r_2/r_1)=2$. A haladó mozgást végző tömeg és a motor áttétele két egymást követő áttétel eredőjeként adódik: az orsó és a motor közötti áttétel i_2 , míg a tömeg és az orsó közötti áttétel $i_o=(2\pi/h)$, ezért a tömeg és a motor közötti eredő áttétel

$$i_m = i_2 i_o = \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{2\pi}{h} = 2 \cdot \frac{2\pi}{0,05} = 251,3 \text{ 1/m}$$

A redukált tehetetlenségi nyomaték összefüggését alkalmazva és behelyettesítve az áttételek értékeit

$$J_{red} = \frac{m}{i_m^2} + \frac{J_1}{i_1^2} + \frac{J_2}{i_2^2} = \frac{200}{251,3^2} + \frac{0,005}{1^2} + \frac{0,12}{2^2} = 0,0382 \text{ kgm}^2$$

adódik. A motor „nem veszi észre”, hogy a tengelyéhez az eredeti rendszer, vagy a J_{red} tehetetlenségi nyomatékú tárcsa van rögzítve, mindkét esetben azonos a mozgásállapot-változása.

A bemutatott esetben a mozgó tömegek sebessége illetve szögsebessége helytől független volt, ezért a redukált tehetetlenségi nyomaték állandó

összefüggést, ahol $\vec{v}_{absz} = \vec{v}_k$ és $\vec{v}_{rel} = \vec{v}_y$, következésképpen $\vec{v}_{száll} = \vec{v}_x$. Tehát a szállító sebesség a kulisszakő kerületi sebességének vízszintes komponensével egyezik meg. A tömeg mozgási energiája az ábrán vázolt pillanatban az α szöghelyzettől függően

$$E = \frac{mv_x^2}{2} = \frac{m(r\omega \sin \alpha)^2}{2}$$

Felírva a mozgási energiák egyenlőségét,

$$\frac{m(r\omega \sin \alpha)^2}{2} = \frac{J_{red}\omega^2}{2}$$

ahonnan

$$\underline{J_{red} = mr^2 \sin^2 \alpha}$$

szöghelyzettől függő redukált tehetetlenségi nyomaték adódik. A motor elfordulási szögének függvényében változó tehetetlenségi nyomaték útgerjesztés esetén önmagában is komoly rezgéskeltő hatással bír (parametrikus gerjesztés). Nyomatékgerjesztéskor pedig (ha állandó motornyomatékot tételezünk fel) a tengely szöggyorsulása

$$\varepsilon(\alpha(t)) = \frac{M}{mr^2 \sin^2 \alpha}$$

szerint pillanatról-pillanatra változik, ami a motor egyenlőtlen járását okozza! Az egyenlőtlen járás mérséklése érdekében legegyszerűbb megoldásként nagy, $J_1 \gg mr^2$ tehetetlenségi nyomatékú lendkereket szokás alkalmazni, mellyel a

$$\varepsilon(\alpha(t)) = \frac{M}{J_1 + mr^2 \sin^2 \alpha}$$

szöggyorsulás, illetve annak változása sokkal kisebb értékű lesz.

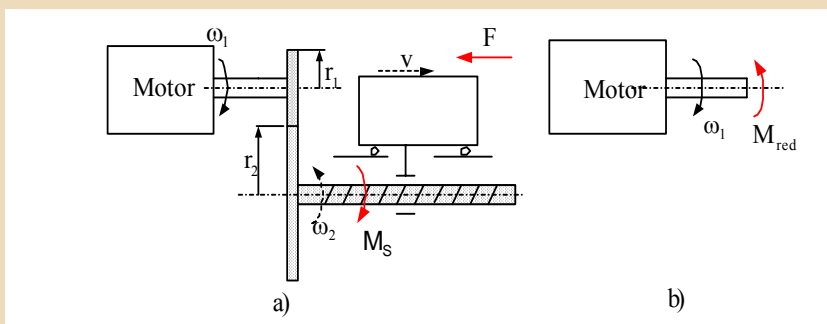
7.1.2. Nyomatékok és erők redukálása a hajtó tengelyre

A nyomatékok és erők redukálásának az alapja az, hogy a redukálendő nyomaték, illetve erő teljesítménye egyezzen meg a motor tengelyére redukált nyomaték teljesítményével.

A mozgó tömeget terhelő erők és nyomatékok redukálást a hajtó tengelyre ismét egy példán mutatjuk be.

7.3 Példa

Tételezzük fel, hogy a mozgó asztalra rögzített, megmunkálás alatt lévő testre $F=500\text{N}$ forgácsoló erő hat, az orsó csapágyazásában pedig $M_s=3\text{Nm}$ súrlódási nyomaték ébred (7.3. ábra). Redukáljuk a gép F és M_s terhelését a motor tengelyére!



7.3. ábra. Terhelések redukálása.

A tehetetlenségi hatásokat most nem vesszük figyelembe, csak a statikus terhelésekkel foglalkozunk. A hajtott gépet terhelő, erőkből és nyomatékokból álló erőrendszer a motor tengelyére az i_j forgó és az i_i forgó-haladó mozgásokra definiált áttételek figyelembevételével redukálható:

$$M_{\text{red}} = \sum \frac{M_j}{i_j} + \sum \frac{F_i}{i_i}$$

Az M_s csapágsúrlódás az ω_2 szögsebességgel forgó tengelyre hat, így áttétele $i_1=i_2=2$. Az F erő a v sebességgel haladó testet terheli, így annak áttétele a motor tengelyére $i_1=i_2*i_o=251,3 \text{ m}^{-1}$. A számértékek behelyettesítésével a redukált nyomaték a következő:

$$M_{\text{red}} = \frac{M_s}{i_j} + \frac{F}{i_i} = \frac{3}{2} + \frac{500}{251,3} = 3,49 \text{ Nm}$$

A redukált nyomaték *értelmét* a következő meggondolással határozhatjuk meg:

Az erő és nyomaték teljesítménye redukálás után is megtartja előjelét.

Figyeljük meg, hogy a bemutatott példában M_s ellentétes értelmű volt ω_2 -vel, valamint F is ellentétes értelmű volt v -vel, következésképpen M_{red} is ellentétes értelmű ω_{mot} -ral.

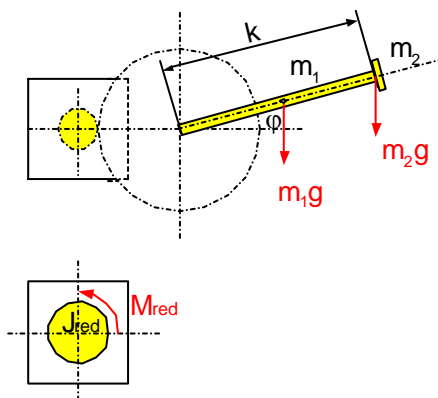
Megjegyzendő, hogy amennyiben a tehetetlenségi hatások (gyorsítás, lassítás), valamint terhelő erők és nyomatékok együttesen lépnek fel, akkor azokat – a *szuperpozíció elvének* értelmében – egymástól függetlenül redukálhatjuk a hajtó gép tengelyére.

Feladatok

F1. Egy $J_m=0,0024 \text{ kgm}^2$ tehetetlenségi nyomatékú motor $i=8$ áttételű, elhanyagolható tömegekből álló hajtóművön keresztül függőleges síkban mozgat egy $k=0,5 \text{ m}$ hosszú, $m_1=6 \text{ kg}$ tömegű prizmatikus robotkart, melynek végére $m_2=5 \text{ kg}$ tömegű festékszóró van rögzítve (7.4. ábra).

Határozza meg a szerkezet

- motor tengelyére redukált J_{red} tehetetlenségi nyomatékát!
- motor tengelyére redukált M_{red} terhelő nyomatékát!

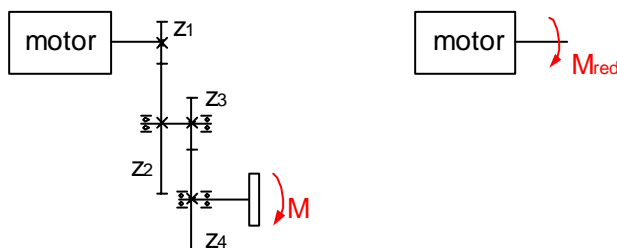


7.4. ábra

Megoldás:
$$J_{red} = J_m + \frac{1}{i^2} \left(\frac{1}{3} m_1 k^2 + m_2 k^2 \right)$$

$$M_{red} = \frac{1}{i} \left(m_1 g \frac{k}{2} \cos \varphi + m_2 g k \cos \varphi \right)$$

F2. Egy motort a $z_1=18$, $z_2=54$, $z_3=20$ és $z_4=50$ fogszámú fogaskerekek-ből álló hajtómű kihajtó tengelyén lévő fékkel M nyomatékkal fékezünk (7.5. ábra).

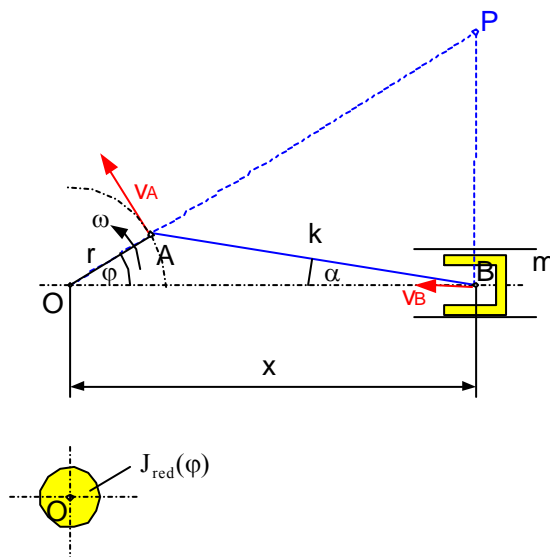


7.5. ábra.

- a) Mekkora a motor tengelyére redukált M_{red} fékezőnyomaték?
- b) Hol hatásosabb a fékezés, a motor tengelyén vagy a hajtómű kihajtó tengelyén?

Megoldás: $M_{red} = M \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3}$

F3. Egy „O” tengelyű motor ω pillanatnyi szögsebességgel forgatja a 7.6. ábrán látható elhanyagolható tömegű forgattyús hajtómű r hosszúságú forgattyús tengelyét, mely a k hosszúságú hajtókar segítségével mozgatja az „m” tömegű dugattyút.



7.6. ábra

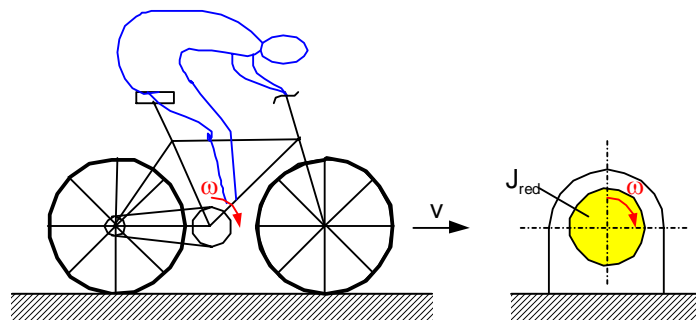
Határozza meg

- a) a rendszer motor tengelyre redukált J_{red} tehetetlenségi nyomatékát!
- b) ábrázolja EXCEL diagrammal a tehetetlenségi nyomaték változását $0 < \varphi < 2\pi$ tartományban

Segítség: fejezze ki az $x=OB$ távolságot φ segítségével, majd határozza meg a dugattyú pillanatnyi $v=dx/dt$ sebességét. A tömeg mozgási energiájából a redukált tehetetlenségi nyomaték kiadódik.

Megoldás: $J_{red}(\varphi) = m r^2 \left(\sin \varphi + \frac{\lambda \sin 2\varphi}{2\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \varphi}} \right)^2$ ahol $\lambda = \frac{r}{k}$

F4. Egy kerékpáros v sebességgel halad (7.7. ábra). Milyen adatok szükségesek ahhoz, hogy a kerékpáros és a kerékpár haladó illetve forgó tömegei egyetlen, a pedál tengelyére redukált tehetetlenségi nyomatékkal legyenek helyettesíthetők? Mekkora ez a redukált tehetetlenségi nyomaték?

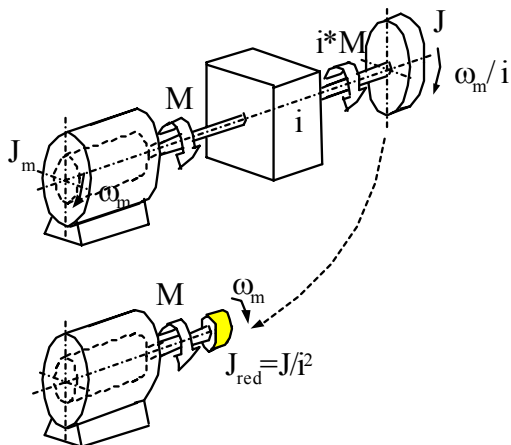


7.7. ábra

7.2. Dinamikai szempontból optimális áttétel meghatározása

Mechatronikai berendezések pozicionálási célra szolgáló hajtásláncainak gyakran kell nagy tömegű testeket mozgatni a lehetséges legrövidebb idő alatt. Adott nagyságú mozgatott tömeg és adott motor esetében a tervező feladata meghatározni a hajtómű azon áttételét, mely maximális gyorsulást, illetve minimális pozicionálási időt okoz.

Hajtó motornak válasszunk DC motort, melynek dinamikus viselkedése egyszerű egyenlettel írható le. A terhelés pedig legyen egy J tehetetlenségi nyomatékú forgórész. A motort és a forgórészt egy egyelőre ismeretlen i áttételű hajtóművel kapcsoljuk össze (7.8. ábra).



7.8. ábra

Amennyiben a motort és a forgórészt közvetlenül ($i=1$) kapcsoljuk össze, a motor szerény nyomatéka nagyon lassan gyorsítja fel a forgórészt, bár nagy fordulatszámra. Ha viszont nagy lassító áttételt ($i \gg 1$) alkalmazunk, akkor a hajtómű által megnövelt nagy nyomaték rövid idő alatt gyorsítja fel a forgórészt, de csak lecsökkentett fordulatszámra. A továbbiakban az áttétel szöggyorsulásra gyakorolt $\varepsilon(i)$ hatását analitikusan vizsgáljuk

7.3. A szögsebesség változásának analitikus vizsgálata

A DC motor egyenlete operátor tartományban

$$\Omega_m(s) = \frac{A}{T_s + 1} U(s) - \frac{B}{T_s + 1} M(s) \quad (7.5)$$

Itt Ω_m a motor szögsebessége, U a motor kapcsolófeszültsége, T a mechanikai időállandó, $M(s)$ a motort terhelő nyomaték, mely tisztán tehetetlenségi (inerciális) terhelés esetén a J_{red} tehetetlenségi nyomatékú forgórész gyorsításából származik. Az áttétel miatt ügyelni kell arra, hogy a motor tengelyére a $J_{red} = J/i^2$ redukált tehetetlenségi nyomaték veendő számításba. A forgómozgás alapegyenlete (perdület-tétel) szerint $M(t) = J_{red} \varepsilon_m$, amit az operátor tartományban $M(s) = J_{red} s \Omega_m(s)$ alakban írható. A (7.5) képletbe helyettesítve

$$\Omega_m(s) = \frac{A}{Ts + 1} U(s) - \frac{B}{Ts + 1} J_{\text{red}} s \Omega_m(s) \quad (7.6)$$

A motor szögsebességét kifejezve:

$$\Omega_m(s) = \frac{A}{(T + BJ_{\text{red}})s + 1} U(s) \quad (7.7)$$

Vegyük észre, hogy a motorra kapcsolt tehetetlen tömeg a motor időállandójának BJ_{red} -tal való növekedését okozta. Ügyeljünk arra is, hogy számunkra nem a motor, hanem a hajtott tömeg $\omega(t) = \omega_m(t)/i$ szögsebessége a lényeges. Helyettesítsük $\Omega(s) = \Omega_m(s)/i$, valamint $J_{\text{red}} = J/i^2$ összefüggéseket (7.7)-be, majd alakítsuk át az inverz Laplace-transzformációhoz.

$$\Omega(s) = \frac{A/i}{(T + B \frac{J}{i^2})s + 1} U(s) = \frac{A}{i(T + B \frac{J}{i^2})} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{(T + B \frac{J}{i^2})}} U(s) \quad (7.8)$$

Ugrás bemenet feltételezve ($U(t) = U \cdot 1(t)$), a mozgatott tömeg szögsebességének időbeli alakulását a teljes levezetés mellőzésével az

$$\omega(t) = \frac{AU}{i(T + B \frac{J}{i^2})} (1 - \exp(-\frac{t}{T + B \frac{J}{i^2}})) \quad (7.9.)$$

egyenlet írja le. A nevező zárójelében szereplő mennyiségek dimenzióinak homogenitásából következően a motor mechanikai időállandója a motor forgórészének J_m tehetetlenségi nyomatékával arányos, ezért $T = BJ_m$ alakban is írható. Vezessük be továbbá a mozgatott tömeg és a motor tehetetlenségi nyomatékának $\lambda = J/J_m$ arányát. Az összefüggés ezzel

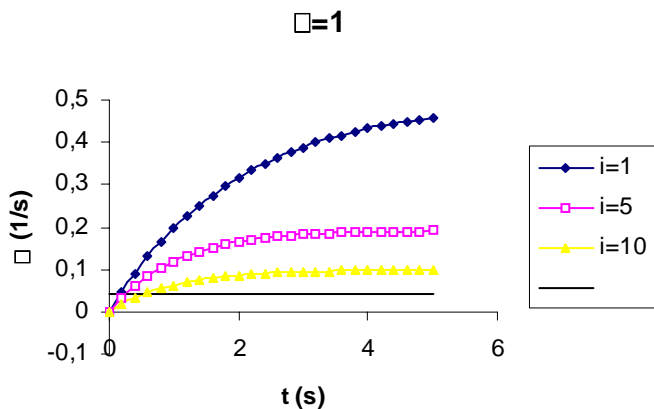
$$\omega(t) = \frac{AU}{iB(J_m + \frac{J}{i^2})} (1 - \exp(-\frac{t}{B(J_m + \frac{J}{i^2})})) = \frac{AU}{iT(1 + \frac{\lambda}{i^2})} (1 - \exp(-\frac{t}{T(1 + \frac{\lambda}{i^2})})) \quad (7.10)$$

alakú lesz. A motor T mechanikai időállandóját, valamint az $\omega_0 = AU$ üresjárási szögsebességet ismertnek és állandónak feltételezve ($T=1$ s, $AU=1$ 1/s), a hajtott tömeg szögsebességének alakulása csak a tehetetlenségi nyomatékok λ arányától, valamint az átalakító i áttételétől függ. Az

$$\omega(t) \propto \frac{1}{i(1 + \frac{\lambda}{i^2})} (1 - \exp(-\frac{t}{1 + \frac{\lambda}{i^2}})) \tag{7.11}$$

összefüggést $\lambda=1,10,100$ tehetetlenség-arányokra és $i=1,5,10$ áttételekre vizsgáljuk. Az egyes tehetetlenség-arányokra külön EXCEL diagramot rajzoltunk. Mindhárom diagramon bejelöltük az $\omega=0,04$ 1/s elérendő szögsebesség egyenesét. Azt vizsgáltuk, hogy a mozgatott tömeg mekkora áttétel esetén éri el a legkisebb idő alatt a célul tűzött szögsebességet.

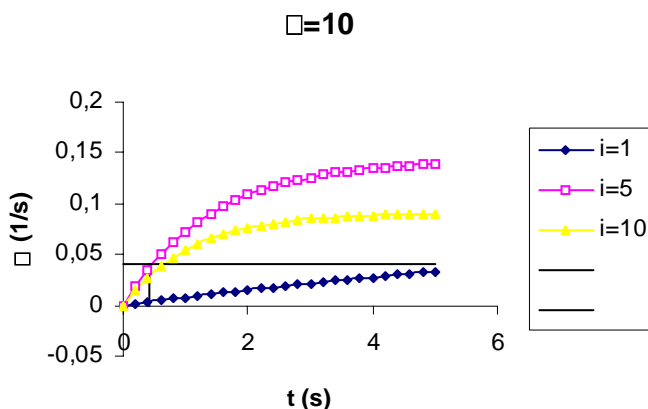
a) Először azt az esetet vizsgáljuk, mikor a motor és a mozgatott tömeg tehetetlenségi nyomatéka megegyezik ($\lambda=1$).



7.9. ábra. A hajtott test szögsebességének változása $\lambda=1$ esetén

A diagramból megállapítható, hogy a célul tűzött szögsebességet legrövidebb idő alatt $i=1$ áttétel (direkt hajtás) esetén éri el a test. Legkedvezőtlenebb a nagy ($i=10$) áttételű hajtás.

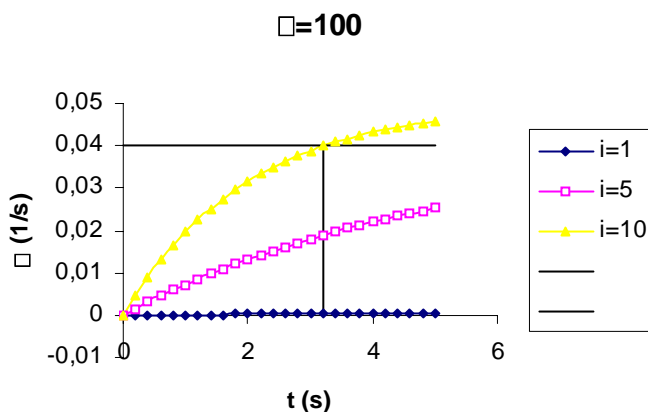
b) Második esetben a hajtott test tehetetlenségi nyomatéka tízszerese a motorénak.



7.10. ábra. A hajtott test szögsebességének változása $\lambda=10$ esetén.

A diagrafból megállapítható, hogy a célul tűzött szögsebességet legrövidebb idő (kb. 0,42 s) alatt $i=5$ áttétel esetén éri el a test. Most a direkt hajtás okozza a legkisebb gyorsulást.

c) Végül százszoros tehetetlenségi nyomatékú mozgatott forgórészt tételünk fel.



7.11. ábra. A hajtott test szögsebességének változása $\lambda=100$ esetén

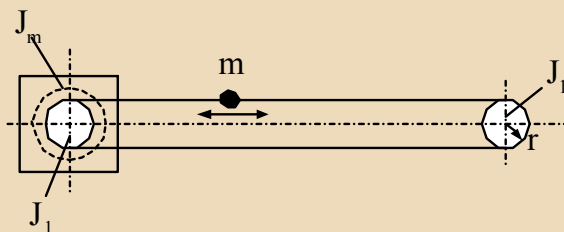
A diagramból megállapítható, hogy a célul tűzött szögsebességet legrövidebb (kb. 3,2 s) idő alatt $i=10$ áttétel esetén éri el a test. Most is a direkt hajtás a leglassabb.

Láthatóan lassító áttétel közbeiktatásának akkor van jelentősége, mikor a mozgatott tömeg tehetetlenségi nyomatéka sokkal nagyobb a motor tehetetlenségi nyomatékánál. Ugyanakkor szem előtt kell tartani, hogy a lassító áttétel beiktatása egyúttal csökkenti az elérhető szögsebesség maximális értékét, ezért az áttétel növelésének csak eddig van értelme.

A gyorsulás szempontjából optimális áttétel megválasztása több paraméter együttes hatásától függ. Tovább nehezíti a helyzetet, hogy maga az áttétel is rendelkezik járulékos tehetetlenségi nyomatékkal (fogaskerekek, tengelyek tehetetlensége) vagy egyéb veszteséggel, ezért nem lehetséges az optimális áttételt explicit összefüggéssel meghatározni. Helyette a hajtás konkrét adatainak ismeretében, még a tervezés fázisában célszerű szimulációs vizsgálatot végezni különféle áttételekkel és az így nyert változatok közül az optimális áttételt kiválasztani. Egy ilyen vizsgálatot mutat a következő példa.

7.4 Példa

A $J_m=0,000012 \text{ kgm}^2$ tehetetlenségi nyomatékú, $T=0,15 \text{ s}$ időállandójú DC motor a forgórészére szerelt J_1 tehetetlenségi nyomatékú tárcsán átvetett elhanyagolható tömegű rugalmas acélhuzallal mozgatja az XY-író $m=0,01 \text{ kg}$ tömegű írotollát (7.12. ábra). Az acélhuzal hajlítgatásából származó terhelőnyomatékot egyelőre hanyagoljuk el.



7.12. ábra. XY író hajtásrendszerének egyszerűsített vázlata

Határozzuk meg, mekkora r tárcsasugár esetében éri el az író toll a 2 m/s sebességet a legrövidebb idő alatt, ha

- a) minden veszteséget elhanyagolunk
- b) csak a súrlódási veszteséget vesszük figyelembe
- c) csak a vonóelem hajlításából származó veszteséget vesszük figyelembe!

Megoldás:

ad a)

A motor egyenletében szereplő konstansok a következők:

Ha tudjuk, hogy a motor üresjárási szögsebessége $\omega_0 = 480 \text{ 1/s}$ $U = 12 \text{ V}$ kapocsfeszültségnél, akkor

$$A = \frac{\omega_0}{U} = \frac{480}{12} = 40 \frac{1}{\text{sV}}$$

továbbá

$$B = \frac{T}{J_m} = \frac{0,15}{0,000012} = 12500 \frac{1}{\text{sNm}}$$

A mozgatott tömegek motor tengelyére redukált tehetetlenségi nyomatéka a mozgatott tömegek, valamint a redukált tömeg mozgási energiáinak egyenlősége alapján határozható meg:

$$J_{\text{red}} \frac{\omega_m^2}{2} = 2J_1 \frac{\omega_m^2}{2} + m \frac{(r\omega_m)^2}{2}$$

A terhelés redukált tehetetlenségi nyomatéka egyszerűsítés után:

$$J_{\text{red}} = 2J_1 + mr^2$$

A J_1 tárcsát 5mm vastag, r sugarú acélkorongnak tételezzük fel, így a sugár függvényében a redukált tehetetlenségi nyomaték a következő:

$$J_{\text{red}} = 2(r^2 \pi \cdot 0,005 \cdot 7800) \frac{r^2}{2} + 0,01 \cdot r^2 = 122 \cdot r^4 + 0,01 \cdot r^2$$

A mozgatott író toll $v=r\omega_m$ sebessége a (7.11) összefüggés értelemszerű alkalmazásával:

$$\begin{aligned} V(s) = r \cdot \Omega_m(s) &= r \cdot \frac{A}{(T + BJ_{\text{red}})s + 1} U(s) = \\ &= \frac{rA}{(T + BJ_{\text{red}})} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T + BJ_{\text{red}}}} U(s) \end{aligned}$$

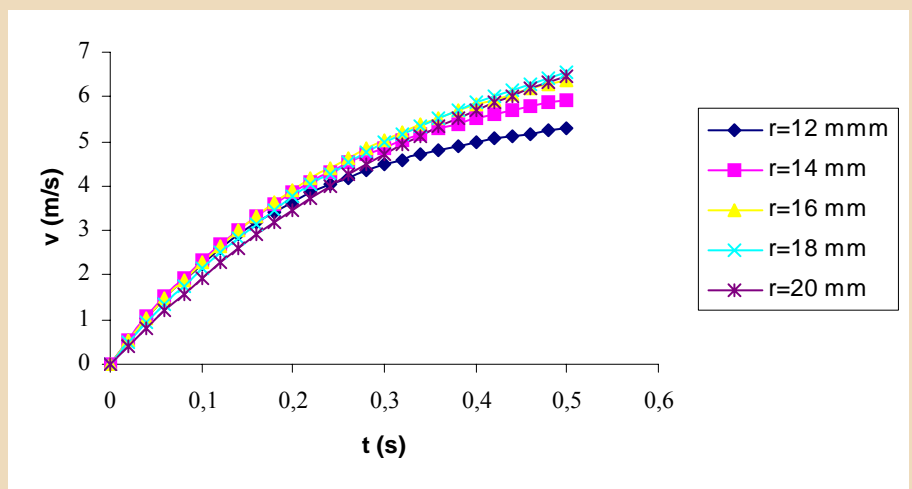
ami idő tartományban ugrásbemenetet feltételezve a következő lesz:

$$v(t) = rAU_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{B(J_m + 2J_1 + mr^2)}\right)\right)$$

A szám adatok helyettesítésével az író toll sebessége:

$$v(t) = r480 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{12500(0,000012 + 122r^4 + 0,01r^2)}\right)\right)$$

A tárcsák r sugarát 12, 14, 16, 18 és 20 mm-re választva az író toll sebessége a bekapcsolást követően az alábbi (7.13) EXCEL diagram szerint alakul. Megállapítható, hogy az optimális sugár értéke $r=14$ mm körül van, mivel az író toll ekkor kb. 0,08 s alatt éri el a 2 m/s sebességet. Ennél kisebb, vagy nagyobb sugarú tárcsa esetén a gyorsítás ideje hosszabb.



7.13. ábra

ad b)

Tételezzük fel, hogy a súrlódás legyőzése $M_s=0,016$ Nm nyomatékot igényel. A motort terhelő nyomaték tehát a mozgó tömegek gyorsítására és a súrlódás legyőzésére fordítódik:

$$M(s) = J_{red}s\Omega(s) + M_s$$

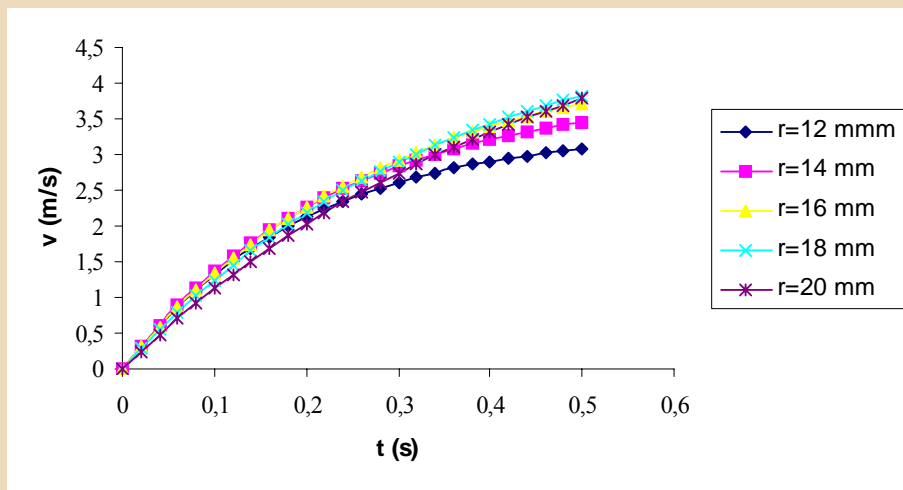
A terhelőnyomaték összefüggését (7.5)-be helyettesítve, majd onnan a motor szögsebességét kifejezve

$$\Omega_m(s) = \frac{AU(s) - BM_s}{(T + BJ_{red})s + 1}$$

összefüggést nyerjük. A számításokat az előzőekhez teljesen hasonlóan megismételve csak a számláló konstansában kapunk eltérést:

$$v(t) = r(480 - 12500 \cdot 0,016) \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{12500(0,000012 + 122r^4 + 0,01r^2)}\right)\right)$$

Az 7.14. ábra görbéit vizsgálva látható, hogy a konstans súrlódási nyomaték az elérési időt befolyásolja, az optimális sugárra csak csekély hatással van. Az író toll most kb. 0,17 s alatt éri el a kitűzött sebességet.



7.14. ábra

ad c)

Az acél vonóelem (huzal) r sugarú tárcsára való görbítéséhez szilárdságtani alapismereteink szerint M_h hajlító nyomaték szükséges a rugalmassági határon belül:

$$\frac{1}{r} = \frac{M_h}{IE}$$

A tárcsa forgatásához szükséges többlet nyomaték arányos az iménti hajlító nyomatékkal, az arányossági tényező k :

$$M_v = cM_h = c \frac{IE}{r} = k \frac{1}{r}$$

A motort terhelő nyomaték tehát a mozgó tömegek gyorsítására és a huzal hajlítási veszteségének fedezésére fordítódik:

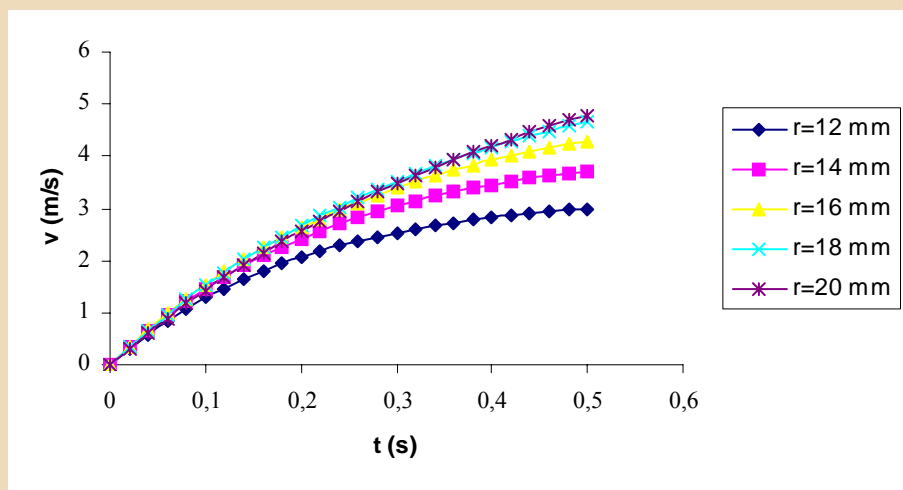
$$M(s) = J_{red}s\Omega(s) + \frac{k}{r}$$

A terhelőnyomaték összefüggését (7.5)-be helyettesítve, majd onnan a motor szögsebességét kifejezve

$$\Omega_m(s) = \frac{AU(s) - B\frac{k}{r}}{(T + BJ_{red})s + 1}$$

Az acélhuzal hajlítási veszteségét $k=0,0002 \text{ Nm}^2$ arányossági tényezővel figyelembe véve az írótooll sebessége a következő lesz:

$$v(t) = r\omega(t) = (r480 - 0,0002 \cdot 12500)(1 - \exp(-\frac{t}{12500(0,000012 + 122r^4 + 0,01r^2)}))$$

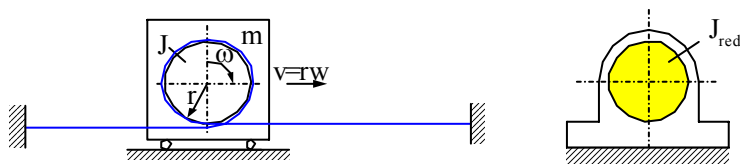


7.15. ábra

A vonóelem merevségének figyelembe vétele esetén az optimális sugár $r = 18 \text{ mm}$, az írótooll kb. $0,14 \text{ s}$ alatt éri el a kitűzött sebességet. A kapott eredmény érthető, mivel nagyobb sugarú tárcsára könnyebb ráhajlítani a vonóelemet.

Feladatok

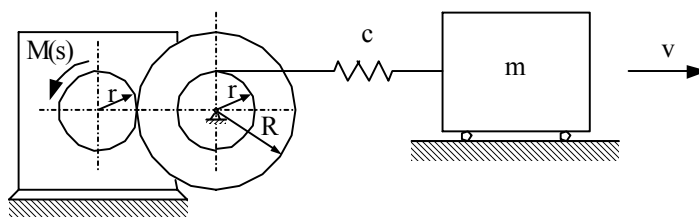
F1. Az acélhuzal vonóelemes hajtású, m tömegű asztal J_m tehetetlenségi nyomatékú motor mozgatja a forgórészre szerelt r sugarú tárcsa segítségével (7.16. ábra). A tárcsa és a vonóelem csúszásmentesen gördül egymáson.



7.16. ábra

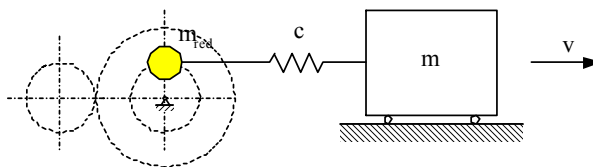
- Határozza meg a rendszer motor tengelyére számított egyenértékű tehetetlenségi nyomatékát!
- Tételezzük fel, hogy az acélhuzal hajlítási merevsége elhanyagolható. A motor forgórészére ható nyomaték $M(s) = \frac{M_0}{Ts + 1}$, függetlenül a motor szögsebességétől. A motor bekapcsolása (ugrásfüggvény!) után hogyan változik az asztal sebessége az idő függvényében?
- Hogyan módosul a sebesség, ha az asztalra $F_{cs} = -kv$ sebességarányos csillapító erő is hat?

F2. Egy $J_m = 10^{-5} \text{ kgm}^2$ tehetetlenségi nyomatékú, terheletlenül $M(s) = \frac{M_0}{Ts + 1}$ állandó nyomatékot kifejtő motor tengelyére $r = 30 \text{ mm}$ gördülőkör sugarú, $m_1 = 0,2 \text{ kg}$ tömegű fogaskerék van rögzítve, mely a $R = 60 \text{ mm}$ sugarú, $m_2 = 0,8 \text{ kg}$ tömegű fogaskereket hajtja, melynek tengelyére $r = 30 \text{ mm}$ sugarú, $m_3 = 0,3 \text{ kg}$ tömegű tárcsa van rögzítve. A tárcsához $c = 10^4 \text{ N/m}$ merevségű szalag van erősítve, mely az $m = 20 \text{ kg}$ tömegű testet mozgatja (7.17. ábra). A fogaskerekeket tekintse merevnek, a fogakat hézagmentesnek.



7.17. ábra

- a) Helyettesítse a forgó tömegeket egyetlen redukált tömeggel! $m_{red}=?$



- b) Határozza meg a rendszer sajátfrekvenciáját! (Segítség:

$$\alpha = \sqrt{\frac{c(m_{red} + m)}{m_{red}m}}$$

- c) Írja fel az m tömeg sebességét az operátor és időtartományban, a motor bekapcsolását követően! ($M_0=30 \cdot 1(t)$ Nm; $T=0,2$ s)

Irodalom

- Bajcsai Pál: *Numerikus analízis*. Budapest, 1980, Tankönyvkiadó
- Bradley, D. A., Dawson, D., Burd, N.C.: *Mechatronics*. Gateshead, 1991, Atheneum Press Ltd.
- Bishop, Robert (szerk.): *The Mechatronics Handbook*. London-New York-Washington D. C., 2002, CRC Press LLC
- Heimann, Gerth, Popp: *Mechatronik*. München-Wien, 2001, Fachbuchverlag Leipzig
- Isermann, R.: *Mechatronische Systeme*. Berlin, 1999, Springer
- Kármán Tódor-Biot, Maurice: *Matematikai módszerek műszaki feladatok megoldására*. Budapest, 1967, Műszaki Könyvkiadó
- Petrik Olivér: *Finommechanika*. Budapest, 1974, Műszaki Könyvkiadó
- Roddeck, Werner: *Einführung in die Mechatronik*. Stuttgart, 1997, B. G. Teubner
- Szabó Imre: *Gépészeti rendszertechnika*. Budapest, 1983, Műszaki Könyvkiadó
- Szabó Imre: *Rendszer és irányítástechnika*. Budapest, 1992, Műszaki Könyvkiadó
- Szász Gábor: *Rendszertechnika útmutató és példatár*. Budapest, 1979. Tankönyvkiadó